



UNIVERSIDAD ESTATAL PENINSULA DE SANTA ELENA

FACULTAD DE SISTEMAS Y TELECOMUNICACIONES

CARRERA DE ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

TRABAJO DE TITULACIÓN

Propuesta tecnológica, previo a la obtención del Título de:

INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROL ESTIMADOR LINEAL
CUADRÁTICO PARA LA ESTABILIZACIÓN DE UN SISTEMA ELECTRÓNICO
ROBÓTICO BALANCÍN”**

AUTOR

JAIRO DANIEL RAMÍREZ RIOFRIO

TUTOR

ING. CARLOS ALBERTO SALDAÑA ENDERICA Mgtr.

LA LIBERTAD – ECUADOR

2024

AGRADECIMIENTO

Agradezco a mi Padre celestial por permitirme esta oportunidad de alcanzar esta meta, por lo que he aprendido y experimentado en el transcurso de la carrera, por acompañarme en todos los momentos haciéndome saber y entender que solo Él tiene la capacidad de cumplir todas sus promesas y hasta ahora no ha fallado a ninguna de sus palabras, y el esforzarme por hacer un buen trabajo como para Él rinde sus frutos.

Agradezco a mi familia por todo su apoyo y respaldo, esencialmente a mamá, la cual siempre ha estado guiándome aun cuando quería desistir, disciplinándome cuando estuve mal y siendo un pilar fundamental en cada peldaño, agradezco a mi papa, del cual he aprendido el temple y el coraje para enfrentar toda situación y tambien a mis hermanos que me han apoyado y cuidado. Tambien a cada una de las personas que me conocen de toda la vida, por extenderme su mano aun cuando no tenía algo que dar.

Agradezco a cada docente de la Facultad de Sistemas y Telecomunicaciones que con paciencia y profesionalismo me impartieron sus conocimientos y experiencia más allá de sus excelentes clases impartidas. De manera especial menciono mi tutor de tesis, el ingeniero Carlos Saldaña, quien estuvo guiándome en el desarrollo del proyecto de titulación, además de sus consejos y enseñanzas que me permitieron avanzar y disfrutar este proceso que siempre estarán presentes en al ámbito profesional.

Jairo Daniel Ramírez Riofrio

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de titulación a mi madre la pastora Marilupe Riofrío y a mi padre el pastor Hugo Ramírez quienes siempre vieron por mi bienestar, también formaron en mí con amor y esfuerzo los valores y la fe para decidir por lo que a Dios le agrada. También a los pastores Carola Lázaro y Miguel Cruz quienes se han convertido como en mi segunda familia porque siempre estuvieron dispuestos a ayudarme, además lo dedico también a la pastora Alfarina quién me dio su apoyo incondicional, les estoy eternamente agradecido.

Jairo Daniel Ramírez Riofrio

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi calidad de tutor del trabajo de titulación denominado: “Diseño e implementación de un control estimador lineal cuadrático para la estabilización de un sistema electrónico robótico balancín”, presentado por la estudiante Jairo Daniel Ramirez Riofrio, de la carrera de electrónica y telecomunicaciones de la Universidad Península de Santa Elena, me permito declarar que luego de haber orientado, estudiado y revisado, lo apruebo en todas sus partes.

Esta aprobación se informa para los fines pertinentes.

Ing. Carlos Alberto Saldaña Enderica, Msc.
DOCENTE TUTOR

TRIBUNAL DE GRADO

Ing. Washington Torres Guin, Mgt.
DECANO DE LA FACULTAD

Ing. José Sánchez Aquino, Mgt.
DIRECTOR DE CARRERA

Ing. Óscar Gómez Morales, Mgt.
DOCENTE DEL AREA

Ing. Carlos Saldaña Enderica, Mgt.
DOCENTE TUTOR

Ab. María Rivera Gonzáles, Mgt.
SECRETARIA GENERAL

DECLARACIÓN DEL AUTOR

Yo Jairo Daniel Ramirez Riofrio, egresado de la Universidad Estatal Península de Santa Elena, Facultad Sistemas y Telecomunicaciones, de la Carrera de Electrónica y Telecomunicaciones, con libertad y en plena voluntad declaro que la responsabilidad del contenido del presente Trabajo de Titulación me corresponde exclusivamente y la propiedad intelectual de la misma le pertenece a la Universidad Estatal Peninsula de Santa Elena.



Jairo Daniel Ramirez Riofrio

RESUMEN

Este proyecto de grado se enfoca en mejorar la estabilización de un sistema electrónico robótico balancín mediante el diseño e implementación de un control estimador lineal cuadrático (LQE). El objetivo es lograr una respuesta de equilibrio más eficiente frente a perturbaciones y ruidos internos y externos, mejorando así el desempeño del robot equilibrista.

Inicialmente, se diseña el diagrama de conexión de los elementos del sistema robótico y se realiza un análisis matemático del sistema de cuerpo libre aplicado a la planta. Se obtienen funciones diferenciales que describen su comportamiento dinámico, utilizando la lógica de Lagrange y análisis de fuerzas generalizadas y torque en el motor. Posteriormente, se representan estas ecuaciones en variables de estado y se linealizan en el punto de equilibrio mediante el jacobiano.

Se lleva a cabo la simulación en lazo abierto del sistema no linealizado y linealizado, seguida del diseño del control mediante software de control numérico. Se realiza la identificación y diseño del control con parámetros sometidos a niveles de ruido y perturbaciones, aplicando el filtro de Kalman para disipar las inestabilidades en la simulación. Se desarrolla el código de programación para el funcionamiento del robot y se aplican las ganancias del controlador y el algoritmo del LQE. Se establece la comunicación del robot con la PC para la obtención de datos relevantes y se evalúa la eficiencia del LQE frente a diferentes valores de ruido y perturbaciones en la simulación.

Palabras claves: Eficiencia, Estabilización, Filtro de Kalman, LQE, Perturbaciones, Sistema Robótico balancín.

ABSTRACT

This undergraduate project focuses on improving the stabilization of an electronic robotic balance system through the design and implementation of a Linear Quadratic Estimator (LQE) control. The aim is to achieve a more efficient balance response to internal and external disturbances and noises, thereby enhancing the performance of the balancing robot.

Initially, the connection diagram of the robotic system elements is designed, and a mathematical analysis of the free body system applied to the plant is conducted. Differential functions describing its dynamic behavior are obtained, using Lagrange's logic and generalized force and torque analysis in the motor. Subsequently, these equations are represented in state variables and linearized at the equilibrium point using the Jacobian.

The simulation of the non-linearized and linearized system is performed in open loop, followed by control design using numerical control software. Identification and control design are carried out with parameters subject to levels of noise and disturbances, applying the Kalman filter to dissipate instabilities in the simulation. Programming code for robot operation is developed, and gains from the controller and LQE algorithm are applied. Robot-PC communication is established for obtaining relevant data, and the efficiency of LQE is evaluated against different values of noise and disturbances in the simulation.

Keywords: LQE, Balancing Robotic System, Disturbances, Efficiency, Kalman Filter, Stabilization

INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTO	ii
DEDICATORIA.....	iii
APROBACIÓN DEL TUTOR.....	iv
TRIBUNAL DE GRADO.....	v
RESUMEN	vii
ABSTRACT	viii
INDICE GENERAL	ix
INDICE DE FIGURAS	xii
INDICE DE TABLAS	xvi
INDICE DE ANEXOS	xvii
INTRODUCCIÓN.....	1
CAPÍTULO I.....	2
1 FUNDAMENTACIÓN	2
1.1 Antecedentes.....	2
1.2 Descripción del proyecto	3
1.3 Objetivos De Propuesta	5
1.3.1 Objetivo general.....	5
1.3.2 Objetivos específicos	5
1.4 Justificación.....	5
1.5 Alcance del Proyecto	7
1.6 Metodología de la Investigación.....	7
1.6.1 Investigación Descriptiva.....	8
1.6.2 Investigación Documental	8
1.6.3 Investigación Aplicada.....	8
1.7 Resultados Esperados	8

CAPÍTULO II.....	10
2 MARCO REFERENCIAL.....	10
2.1 Marco Contextual	10
2.2 Marco Conceptual.....	12
2.2.1 Sistema Balancín, péndulo invertido	12
2.2.2 Robot balancín (péndulo invertido)	14
2.2.3 Modelado matemático de sistemas	15
2.2.4 Diseño en el espacio de estados	19
2.2.5 Modelado matemático de sistema en general	22
2.2.6 Linealización de sistemas no lineales.	23
2.2.7 Propiedades de los sistemas de espacio de estados.....	27
2.2.8 Definiciones generales a cerca de los sistemas de control automático.....	29
2.2.9 Control automático del sistema.....	31
2.2.11 Estimador Lineal Cuadrático	39
2.2.12 Sistema robótico-electrónico	43
2.3 Marco Teórico.....	48
CAPÍTULO III.....	50
3 DESARROLLO	50
3.1 COMPONENTES DE LA PROPUESTA.....	50
3.1.1 Elementos físicos (Hardware).....	50
3.1.2 Componentes lógicos (Software).....	53
3.1.3 Diagrama de Conexión de los elementos electrónicos	55
3.2 DISEÑO DE LA PROPUESTA	56
3.2.1 Sistema de péndulo invertido (Robot balancín).....	56
3.2.2 Modelo matemático del sistema robótico	58
3.2.3 Identificación del modelo matemático en espacio de estados del sistema robótico balancín	68

3.2.4	Diseño del sistema de control mediante bloques de simulación.....	72
3.3	Desarrollo del control en microcontrolador del Robot Balancín.....	100
3.4	Comunicación serial mediante modulo Bluetooth.....	101
CAPÍTULO IV		104
4	ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS	104
4.1	Análisis comparativo en rendimiento de control.....	104
4.1.1	Parámetros de medición ante pruebas de rendimiento.....	104
4.1.2	Servocontrol mediante ubicación de polos a partir de los parámetros del robot.....	105
4.1.3	Servocontrol mediante ubicación de polos a partir de la matriz de identificación de la planta.....	105
4.2	Pruebas de desempeño en estimación de señales estocásticas control LQE	106
4.2.1	Condición Inicial 1: $\theta=0^\circ$; $x=0$	106
4.2.2	Condición Inicial 2: $\theta=30^\circ$; $x=0,85$	109
4.3	Comparativa del servosistema de control con estimador y sin estimador lineal cuadrático.....	112
Conclusiones.....		114
Recomendaciones		116
Bibliografías		117
Anexos		123

INDICE DE FIGURAS

Figura 1. Esquema descriptivo de la propuesta.....	4
Figura 2. a) Sistema Continuo, b) Sistema discreto.	13
Figura 3. Diagrama de cuerpo libre, péndulo invertido.....	14
Figura 4. Fases del modelado matemático	18
Figura 5. Comportamiento de un sistema en el tiempo	20
Figura 6. (a)Sistema de péndulo invertido; (b)Robot balancín	31
Figura 7. Diagrama de bloque de un sistema de nivel de líquido.....	31
Figura 8. Diagrama de un sistema de control en lazo abierto	32
Figura 9. Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado.....	33
Figura 10. Sistema de control en lazo cerrado $u = -Kx$	35
Figura 11. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado	39
Figura 12. Diagrama de bloques del filtro de Kalman	42
Figura 13. Rueda fija, ejemplo	44
Figura 14. Diagrama de comunicación que ilustra la disposición de los elementos. .	50
Figura 15. Representación real del dispositivo MPU6050.....	51
Figura 16. Sensor de motor, encoder de efecto Hall.	52
Figura 17. Representación real del driver TB6612FENG.	52
Figura 18. Diagrama de pines del motor GA37-520	53
Figura 19. Diagrama de conexión de los componentes electrónicos.....	55
Figura 20. Diagrama del sistema de péndulo invertido.....	56
Figura 21. Diagrama del sistema de péndulo invertido.....	60
Figura 22. Modelo basado en los parámetros de sistema en espacio de estados.....	65
Figura 23. Modelo de espacio de estados discretizado.....	66
Figura 24. Respuesta ante la señal de impulso del sistema No lineal (a) y el linealizado (b)	67
Figura 25. Respuesta al impulso del sistema discretizado	68

Figura 26. Diagrama del sistema robótico balancín en lazo abierto.....	69
Figura 27. Diagrama del sistema robótico balancín en lazo abierto.....	70
Figura 28. Comparación Señales de estimación de la planta balancín.....	70
Figura 29. Matrices de Controlabilidad (a) y Observabilidad (b) del sistema.	75
Figura 30. Matrices de espacios de estados aumentados.....	77
Figura 31. Modelo de espacios de estados aumentados	77
Figura 32. Matriz P2 del sistema aumentado	78
Figura 33. Sistema de espacio de estados realimentado mediante ubicación de polos con el seguimiento a la referencia.	82
Figura 34. Servosistema control de realimentación por ubicación de polos en el Software de simulación numérica.....	83
Figura 35. Salidas del Servosistema por ubicación de polos.....	83
Figura 36. Estados del Servosistema. a) Seguimiento a la referencia de la distancia lineal, b) Ángulo de inclinación del péndulo, c) Velocidad del robot (metros sobre segundos) y d) Velocidad angular del péndulo	84
Figura 37. Señal de control del sistema.....	84
Figura 38. Ruido Blanco Gaussiano de Proceso y de Medida.	85
Figura 39. Servosistema de control por realimentación de estados y ubicación de polos, con Ruidos Blancos Gaussiano de proceso y de medida.	86
Figura 40. Salidas del servosistema con ruidos.....	86
Figura 41. Estados del sistema con ruido blanco gaussiano.....	87
Figura 42. Señal de control del Servosistema con ruidos blancos gaussianos.	87
Figura 43. Sistema de espacio de estados aumentados para el diseño del filtro de Kalman.	89
Figura 44. Modelo de espacio de estados del sistema aumentado con el filtro de Kalman aplicado.....	90
Figura 45. Captura del Block Parameters: Kalman Filter, pestaña Model Parameters (a) y pestaña Options (b)	92
Figura 46. Implementación del filtro de Kalman en el sistema estimado.	93

Figura 47. Estados Estimados Óptimos.....	93
Figura 48. Salidas de la planta sin filtro y filtrado.	94
Figura 49. Grafica de medición del t_{ss} para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.	96
Figura 50. Grafica de medición del M_p en la señal de salida para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.....	96
Figura 51. Valor inicial perteneciente ángulo de inclinación $\theta(t)$ en el sistema por ubicación de polos.	97
Figura 52. Rango de los valores el ángulo de inclinación $\theta(t)$ para el sistema por ubicación de polos	97
Figura 53. Valores iniciales de la señal de control $u(t)$ para el control mediante ubicación de polos LQE	98
Figura 54. Magnitudes máximos y mínimos en la señal de control $u(t)$ para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.....	98
Figura 55. Rango de valores de la señal de control $u(r)$ para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.	99
Figura 56. Planta real del Robot Balancín.....	101
Figura 57. Bloques de comunicación serial simplex para el ángulo de inclinación.	101
Figura 58. Recepción de la señal del ángulo del robot con el Serialplot.....	102
Figura 59. Recepción de la señal del ángulo de inclinación del robot mediante Bluetooth.	102
Figura 60. Recepción de la señal del ángulo de inclinación del robot mediante el Cables Serial.....	103
Figura 61. Gráfica para análisis comparativo del tiempo de establecimiento del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	107
Figura 62. Gráfica para análisis comparativo del máximo sobreimpulso del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	107
Figura 63. Gráfica para análisis comparativo del Error de Estado Estacionario del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	108

Figura 64. Gráfica para análisis comparativo del Error Cuadrático Medio del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	108
Figura 65. Gráfica para análisis comparativo de Convergencia del Filtro de Kalman del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	109
Figura 66. Gráfica para análisis comparativo del tiempo de establecimiento del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	109
Figura 67. Gráfica para análisis comparativo del Máximo Sobreimpulso del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	110
Figura 68. Gráfica para análisis comparativo del Error de Estado Estacionario del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	111
Figura 69. Gráfica para análisis comparativo del Convergencia del Filtro de Kalman del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.....	111
Figura 70. Señales del sistema de servocontrol por ubicación de polos con filtro de Kalman vs sin Filtro de Kalman	112
Figura 71. Aplicación de Matlab System Identification.....	129

INDICE DE TABLAS

Tabla 1. Lista de parámetros y constantes de la planta balancín	14
Tabla 2. Variables y constantes paramétricas de la planta balancín.....	57
Tabla 3. Estimaciones de mayor correspondencia por modelo de estados.	71
Tabla 4. Resultados del sistema de control por ubicación de polos con los parámetros del robot.	105
Tabla 5. Resultados del sistema de control por ubicación de polos con los calores de identificación de la planta.....	105
Tabla 6. Resultados del sistema de control por ubicación de polos con los parámetros del robot.	106
Tabla 7. Parámetros evaluados en los sistemas sin filtro y con filtro de Kalman.....	112
Tabla 8. Datos Técnicos del Motor DC GA37-520	125
Tabla 9. Datos técnicos de la tarjeta Arduino uno R3.....	126
Tabla 10. Datos técnicos del Arduino Uno	126
Tabla 11. Datos técnicos del controlador TB6612FNG.....	127
Tabla 12. Datos Técnicos del Driver TB6612FNG.....	127
Tabla 13. Datos técnicos del Sensor MPU-6050	127
Tabla 14. Datos Técnicos del Sensor MPU-6050	128
Tabla 15. Datos técnicos del Módulo Bluetooth HC-05	129
Tabla 16. Datos Técnicos de Modulo Bluetooth HC-05.....	129

INDICE DE ANEXOS

Anexo 1. Elaboración de las ecuaciones que describen el movimiento.....	123
Anexo 2. Ecuaciones de Lagrange	123
Anexo 3. Ecuaciones de Euler-Lagrange	124
Anexo 4. Datos Técnicos del Motor DC GA37-520	125
Anexo 5. Datos técnicos del Arduino Uno	126
Anexo 6. Datos Técnicos del Driver TB6612FNG	127
Anexo 7. Datos Técnicos del Sensor MPU-6050	127
Anexo 8. Datos Técnicos de Modulo Bluetooth HC-05.....	128
Anexo 6. Aplicación System Identification.....	129

INTRODUCCIÓN

En el campo del control automático, los controladores PID han permanecido como principal herramienta de control desde sus inicios, demostrando su relevancia y versatilidad en una amplia gama de aplicaciones industriales y robóticas. A pesar de los avances tecnológicos, estos controladores siguen siendo ampliamente utilizados debido a su simplicidad y facilidad de ajuste. Sin embargo, la necesidad de un control más preciso y sintonizado en situaciones específicas ha llevado al surgimiento de enfoques más avanzados, como el Estimador Lineal Cuadrático (LQE).

El LQE, fundamentado en la teoría de filtrado de Kalman, ha revolucionado el panorama del control automático al abordar desafíos que exceden las capacidades de los controladores PID convencionales. Su capacidad para estimar parámetros del sistema que no pueden ser medidos directamente, junto con su aplicación en una amplia variedad de campos, desde la navegación autónoma hasta la estabilización de sistemas de transporte, lo convierte en un recurso relevante en la búsqueda de la optimización y el rendimiento en sistemas complejos.

En este contexto, la presente investigación busca explorar y evaluar la aplicabilidad del Estimador Lineal Cuadrático en el contexto de la estabilización de un robot balancín de dos ruedas. A través de la implementación y análisis de esta técnica avanzada de control, se busca mejorar la eficiencia y precisión del sistema en cuestión, allanando el camino hacia soluciones más efectivas en el control automático y contribuyendo al desarrollo continuo de tecnologías en constante evolución dentro de este campo.

El presente proyecto de titulación comprende un total de cuatro capítulos:

En el primer capítulo, se establecen los fundamentos de la investigación, presentando antecedentes y objetivos centrados en el diseño de un controlador LQE para un robot balancín de dos ruedas. El segundo capítulo explora los marcos contextual y conceptual, abordando temas como el modelado matemático de sistemas y sistemas de control automático. El tercer capítulo se enfoca en el desarrollo del proyecto, detallando componentes físicos y lógicos, y diseñando del sistema robótico y el controlador LQE. En el cuarto capítulo, se adelantan las pruebas y se realiza un análisis comparativo de los resultados obtenidos con la implementación del LQE, seguido de conclusiones y recomendaciones. Las referencias y anexos complementan esta investigación que busca avanzar en el campo del control automático y sistemas robóticos.

CAPÍTULO I

1 FUNDAMENTACIÓN

1.1 Antecedentes

El control Proporcional Integral Derivativo (PID) ha sido aplicado en múltiples áreas en la industria y la robótica durante un largo tiempo. Los controladores PID vienen desde la época de 1890 a partir de los diseños Thornycroft [1] [2]. Aun cuando ha pasado un largo tiempo, está presente estos controles en el área industrial. Una encuesta realizada en 1989, el 90% de las industrias de la época emplearon controladores PID [3]. Esta gran utilidad que caracteriza al PID es debido a su simplicidad y factibilidad en su ajuste de línea [4] [5]. Sin embargo, hay situaciones en las que es necesario una mayor entonación para el control, ya que las características del proporcional integral derivativo llevan a un amortiguamiento bastante violento, generando de esta manera un sobre impulso notable con respuestas oscilatorias, además de presentarse complicaciones de estimación en entornos ruidosos e inestabilidades que podrían afectar el sistema [5].

Por otro lado, en los comienzos del control óptimo se presentaban problemas de índole estadísticos, los cuales se volvía una necesidad el poder solventarlos, problemas como predicciones de señales aleatorias, la separación de una señal aleatoria de un ruido. Wiener, en su trabajo de series de tiempo estacionario presenta una solución para estas predicciones de señales aleatorias y separación de señales y ruidos aleatorios, [6], donde demostró que, en la teoría de estimación de mínimos cuadrado, la respuesta de impulso del filtro no depende de las series de entrada y salida en sí, sino de las funciones estadísticas de las series de entrada y salida. Por lo tanto, la modificación de la ecuación en tiempo continuo para sistemas lineales variante en el tiempo conducirá a la conocida Ecuación Integral de Wiener-Hopf [7].

Esta solución maneja el filtrado de la señal ruidosa usando las propiedades espectrales de la señal deseada y el ruido presente tomando a ambos como proceso estocástico con propiedad lineal [8] [9]. Resultando de este modo en algunas teorías de filtrado posteriores.

Sin embargo, estas resoluciones a cerca de la ecuación de Wiener se encontraban bajo una limitación en el modelado matemático y de sus derivaciones que consecuentemente tienden a ser oscuros por tanto, el ingeniero electrónico Kalman introduce una nueva perspectiva a este conjunto de problemas para poder superar las dificultades que presenta la solución de Wiener [9]. Además, se desarrolla en dos

partes, una es la predicción, en el que se determina la matriz de estado y la matriz de covarianza de error, y la otra parte es la corrección, en esta fase se determina la ganancia de Kalman para poder corregir las predicciones. Esta emplea las salidas previas como entradas actuales, causando que el filtro tenga mejores características [8].

En el transcurso del tiempo se ha logrado una amplia investigación y aplicación de los filtros Kalman gracias al desarrollo en la computación digital y la capacidad que más resalta de un LQE (Lineal Quadratic Estimator), es su habilidad para estimar parámetros del sistema que no pueden ser medidos u observados con precisión [10] [11].

El LQE es usado en áreas como la navegación autónoma y asistida, por ejemplo, seguimiento de objetos, estimación del peso corporal en escala digital y guía de navegación y control de vehículos, en particular aviones y naves espaciales [11].

Los robots móviles se han vuelto populares y son empleados en varias aplicaciones en la industria, así como para asistencia humana, investigación y entretenimiento [10]. En comparación con otros robots móviles con ruedas de estructura similar, un robot péndulo invertido de dos ruedas es capaz de mantener su posición vertical de manera estable mediante la correcta aplicación de un control y filtros en dicho sistema [12].

Las múltiples aplicaciones que se han llevado a cabo durante los últimos años han demostrado la utilidad y eficiencia del controlador LQE como en un control tolerante a fallos de convertidores de frecuencia en la industria [13], aplicaciones para estimación de posición y control de retroalimentación para estimar el desplazamiento de nanopartículas para sistemas cuánticos [14], y control para la estabilización de sistemas de transporte de dos ruedas.

Todo esto da pauta para iniciar un proceso de investigación para la universidad en el área de control automático.

1.2 Descripción del proyecto

En este proyecto se plantea el diseño de un sistema para la estabilización de un robot auto equilibrado mediante el uso de un control por retroalimentación de estados, con lo que se procede a modelar un estimador lineal cuadrático (LQE) con el fin de mantener en equilibrio y rechazar las perturbaciones en el sistema de péndulo invertido. Además, la realización de esta tarea tiene aparejado la aplicación de conocimientos de

electrónica antes previstos, tales como la programación de lenguajes para microcontroladores, la construcción mecánica del dispositivo, la elección y transferencia de datos, el uso de herramientas de comunicación entre el dispositivo y la computadora.

Este estudio tiene como punto de partida el identificar el sistema balancín. En la cual se especifica de manera preliminar cada uno de los componentes electrónicos que forman parte de la estructura robótica, se indaga las características de estos elementos para poder determinar los valores necesarios de su correcto funcionamiento.

Posteriormente se procede con el desarrollo de manera teórica acerca del modelado matemático en lazo abierto para determinar de forma precisa y adecuadamente el número de ecuaciones representativas de la dinámica del sistema electrónico robotizado empleando las variables de estado. El propósito del control direccionado al dicho sistema dinámico reside en que esté logre seguir una referencia bajo ciertas características y condiciones específicas; la estrategia común para simplificar el modelo consiste en linealizarlo en un punto de equilibrio, una vez realizado, se procede a emplear el método de variables de estado con el fin de diseñar el control respectivo.

Continuando con la correspondiente simulación en una herramienta de simulación numérica, la cual se pretende comunicar con la tarjeta del microcontrolador mediante comunicación inalámbrica, como se muestra en el esquema de la figura 1. Y de esta manera aplicar control del robot balancín para poder evidenciar el funcionamiento del filtro Kalman desarrollado con el fin de equilibrar dicho sistema.

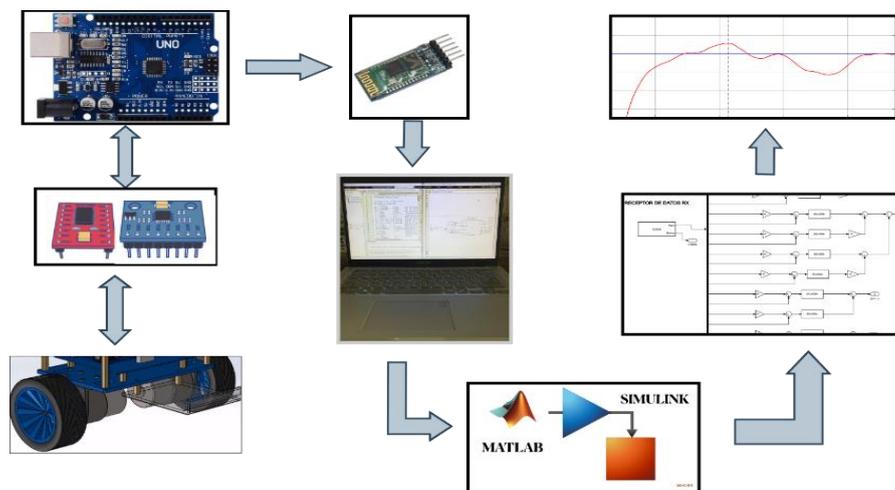


Figura 1.Esquema descriptivo de la propuesta.

1.3 Objetivos De Propuesta

1.3.1 Objetivo general

Modelar e implementar un control retroalimentado mediante un estimador lineal cuadrático (filtro de Kalman) para la estabilización de un sistema electrónico robotizado auto equilibrista de dos ruedas en variables de estado.

1.3.2 Objetivos específicos

- Identificar y establecer los componentes electrónicos que forman parte del sistema equilibrista de dos ruedas para una mayor comprensión del funcionamiento de los elementos hardware y software del sistema robótico.
- Diseño del sistema y diagrama de conexión los elementos electrónicos en un software de simulación para verificación y comprensión de principio de funcionamiento de la electrónica en estos componentes.
- Modelar matemáticamente la planta para realizar el debido control de las variables del sistema, aplicando las teorías de modelado correspondiente en el sistema electromecánico.
- Diseñar el control estimador lineal retroalimentado usando un simulador numérico para estimar las perturbaciones en el sistema no lineal dentro de una simulación tomando en consideración los parámetros que se obtuvieron en el modelado.
- Embeber el algoritmo de control en la placa del microcontrolador con el fin de evidenciar de manera implementada el balanceo que realiza el control estimador lineal cuadrático.
- Establecer una comunicación mediante bluetooth del simulador numérico y la planta para recopilar datos generados por los sensores que obtienen información de los actuadores, permitiendo el análisis de resultados con respecto a la estabilización de la planta electrónica auto equilibrista.

1.4 Justificación

Dentro del sistema robótico auto equilibrado se encuentran algunos fenómenos y características que se pueden tomar como temas de interés para poder analizar e investigar en el campo del control, la electrónica y la robótica. Por mencionar algunas de estas características, este es un sistema no lineal, presenta efectos por parte de señales aleatorias, ruidos aleatorios, tópicos comunes dentro de estas áreas académicas.

En específico, aquellos sistemas móviles se han convertido en temas interesantes entre los investigadores por su eficiencia, por su mecánica simple y porque posee requerimientos dinámicos exigentes [15].

Los robots balancín irrumpen con el concepto paradigmático de un automóvil convencional, con una estructura que principalmente cuenta con dos ruedas laterales y teniendo en medio la planta como cuerpo, por lo que es una forma muy común de demostrar el control de un sistema dinámico. Este tiene una alta maniobrabilidad, requiere un pequeño ángulo para realizar giros y puede moverse en dirección a su inclinación siguiendo la pendiente con el fin de conservar su estabilidad. Debido a su inherencia e inestabilidad del punto de balanceo de referencia, la apropiada medida de controlabilidad y observabilidad deben ser desarrollados para estabilizar el sistema en el punto de equilibrio deseado [16] [17].

Por otro lado, cabe mencionar que el componente electrónico es crucial en un sistema robótico, ya que es el que posibilita la interconexión y el control de los componentes eléctricos y mecánicos del robot. Los sistemas robóticos contemporáneos utilizan tantos componentes electrónicos como mecánicos para llevar a cabo un amplio rango de tareas. Es fundamental que estos sistemas tengan la habilidad de interpretar información de sensores, tomar decisiones y enviar órdenes precisas a los actuadores y motores que regulan los movimientos del robot. En la actualidad se han desarrollado a partir de estos sistemas de péndulo invertido, vehículos comerciales como el Seagway y como el Self Balance two Wheel Hoverboard que manifiestan la notable utilidad en relación con el usuario ya que se emplea para transportar personas [18].

Dentro del territorio nacional se han podido realizar proyectos relacionados a la estabilización de sistemas, estudios que han planteado un avance tecnológico para áreas de investigación en colaboración y automatización de procesos que requieren un control efectivo [19] [15] [20]. Y se ha hecho posible gracias al respaldo constitucional, como apoyo a la investigación científica, al desarrollo tecnológico y a la innovación [21].

Dentro de la documentación que dispone la Universidad Península de Santa Elena se encuentran trabajos previos acerca del control de sistemas, en la que se demostró su optimización en su funcionamiento mediante un controlador PID, colaborando de esta manera con el desarrollo investigativo de los sistemas de control [22]. Para continuar a la contribución de conocimientos es necesario realizar proyectos

de control óptimo de sistemas en la cual se puede evidencia las ventajas que este manifiesta, en específico, la estabilización ante ruidos presentes en la mediciones dentro de un balancín y donde se dificulta el acceso directo a las variables de estado [9].

Este sistema de péndulo invertido además de tener las características antes mencionadas se convierte en un desafío y en un atractivo estudio de implementación, dando lugar a la investigación con respecto a los sistemas no lineales e invariantes en el tiempo. En el campo del control moderno es necesario realizar prácticas experimentales con el fin de verificar el funcionamiento de los algoritmos controladores del sistema, por lo que el modelo equilibrista de dos ruedas provee de una perspectiva realista del filtro estimador lineal cuadrático a desarrollarse para la institución universitaria.

1.5 Alcance del Proyecto

Para este proyecto se desarrolla un modelo que explique el comportamiento dinámico de un robot electrónico balancín y emplear le herramienta de control automático estimador lineal cuadrático sobre esta planta para mantener su estabilidad. La premisa es que, si se logra estabilizar el modelo, es factible que el sistema real robótico auto equilibrado pueda mantener su equilibrio. Para lograr este fin, se desarrolla el mencionado controlador estimador empleando teorías de control moderno.

Para este modelado matemático, se proporcione el análisis de la planta existente con el fin de obtener las variables necesarias para el control, determinando los puntos de equilibrio necesarios para estabilizar el sistema. Por consiguiente, se determinan los rangos de inestabilidad con el que se pretende desarrollar las teorías de control.

El simulado del sistema se realiza con el objetivo de hacer pruebas del sistema de control sobre el modelo matemático desarrollado con ayuda de un software numérico.

Con la simulación trabajando correctamente, se procede a cargar el controlador a la planta propuesta, para hacer las debidas pruebas de experimentación física. Con esta herramienta se ajusta la señal del control, se adquieren resultados para el análisis y las conclusiones del proyecto.

1.6 Metodología de la Investigación

Se explorará el enfoque y las estrategias empleadas para abordar las preguntas de investigación planteadas. Este segmento es crucial para comprender la estructura y

la rigurosidad del proceso investigativo, brindando una visión clara de como se obtendrán y analizarán los datos.

1.6.1 Investigación Descriptiva

En esta propuesta para tesis de grado es necesario describir el control mediante un estimador lineal cuadrático que nos permita analizar las respuestas de comportamiento aplicándole perturbaciones, al momento de acoplarlo en una planta robótica equilibrada.

1.6.2 Investigación Documental

Este proyecto emplea la investigación aplicada, ya que surge la problemática de que a nivel académico no se disponen de los recursos. Para obtener la información necesaria, las fuentes serán: revistas científicas, artículos académicos, libros, sitios web académicos y software de simulación.

1.6.3 Investigación Aplicada

En esta literatura de planteamiento de proyecto se realiza un estudio al sistema balancín robótico mediante la aplicación de conocimientos de control automático y robótica para si estabilizar el posicionamiento vertical del sistema.

1.7 Resultados Esperados

Los resultados que se espera lograr posterior al desarrollo de este proyecto son los siguientes:

- Comprensión de los esquemas electrónicos, características y como todos los componentes interactúan entre sí para producir la función deseada y asegurar el correcto desempeño de este.
- Definitivo modelo matemático correspondiente a la planta partiendo de la adquisición de datos y la teoría de modelado.
- El diseño del control estimador lineal cuadrático debe contemplar un análisis basado en las variables de estado analizadas en la tecnología dispuesta.
- El controlador filtro de Kalman para el sistema no lineal debe ser implementado teniendo en cuenta el tipo de control desarrollado.
- La lógica de control a implementar permitirá comprender de manera directa la relación entre la teoría y la práctica.

- Las simulaciones pertinentes en relación con el funcionamiento del sistema balancín tanto en conexión de componentes electrónicos como de la dinámica del movimiento mecánico.
- La correcta comunicación mediante bluetooth de la herramienta de simulación y el robot balancín para poder transmitir y recibir las señales, que permitan analizar los resultados que nos genere el debido embebido del algoritmo en la planta.
- Sintetizado en el aprendizaje de los sistemas de control moderno con la aplicación de control estimador línea cuadrática a una planta con sistema no lineal, observando los aspectos más resaltantes en su ejecución.
- Propuestas de nuevas temáticas de investigación a partir de los análisis realizados sobre los resultados que se obtuvieron en la implementación.

CAPÍTULO II

2 MARCO REFERENCIAL

A continuación, se presenta el marco referencial, que abarca el marco contextual, marco conceptual y teórico. Este marco proporciona el contexto necesario para comprender el entorno en el cual se desarrolla la investigación, define los conceptos claves que sustentan el estudio y se sumergen en las teorías relevantes que respaldan la comprensión profunda del problema en cuestión. Con el marco referencial, se busca una base establecer una base sólida que oriente la investigación y brinde una perspectiva integral perspectiva integral para la interpretación de los resultados obtenidos.

2.1 Marco Contextual

El desarrollo tecnológico de los robos ha permitido un mayor campo de aplicación en los que se ha llegado a alcanzar cierto nivel de complejidad de control-electrónico, que dotan a estos sistemas de una capacidad notable de agilidad y eficiencia; como en Suiza, en el ETH Instituto de ciencias, tecnología y política de Zurich, precursora en investigación e innovación tanto en Europa como a nivel global, desarrollaron a Ascento que es un robot bípedo compacto con ruedas capaz de navegar rápidamente sobre superficies planas y evadir obstáculos mediante saltos, [23], el cual tiene aplicaciones en varios campos, incluyendo la investigación en robótica, la exploración de terrenos difíciles o peligrosos, la entrega de paquetes y las vigilancia de infraestructuras en conjunto con la interacción humana como asistencia.

Proyectos realizados previamente también han demostrado su agilidad y rapidez, por ejemplo, el robot de investigación Handle que fue introducido el 27 de febrero del 2017 por la empresa estadounidense Boston Dynamics que se dedica al diseño y construcción de robots avanzados, este robot se caracteriza por su velocidad y por su capacidad de saltar una distancia considerable. Utiliza cámaras de profundidad y algoritmos de visión por computadora para detectar y evitar obstáculos mientras se mueve. Tiene solo 10 articulaciones accionadas, lo que lo hace menos complejo que los robots bípedos construidos antes que él. El diseño híbrido de ruedas y patas le permite a Handle atravesar todo tipo de terrenos con una alta movilidad dotándole de un

rendimiento excepcional [24]. Lo cual resulta muy útil para tareas que requieren una gran movilidad y estabilidad, como en líneas de producción, inspección instalaciones, cartografías terrenas o realizar entregas de paquetes.

Así también estos avances tecnológicos han permitido la creación de dispositivos portátiles de transporte eléctrico tanto pequeños como el Segway I2, el cual se basa en el control de péndulo invertido, por lo que emplea sensores de inclinación y giroscópicos para lograr el equilibrio mediante el movimiento de las ruedas [25], como también el transporte a nivel de alta velocidad como la motocicleta Honda Riding Assist el cual cuenta con un sistema de control de dirección que permite prevenir vuelcos cuando el vehículo se encuentre detenido o circulando a velocidades bajas basándose en el sistema de péndulo invertido y se empleó teorías de control óptimo para una eficaz estabilización [26]. Por lo que las aplicaciones se vuelven cada vez más amplia donde se necesite una estabilización considerable.

En el Instituto Balseiro de la Universidad Nacional de Cuyo Argentina se creó un dispositivo robot de sistema péndulo inverso con el fin de explorar técnicas avanzadas de control, entre las cuales se empleó el estimador lineal cuadrático (LQE), que permitió obtener información sobre el modelo [18]. Lo que evidencia la factibilidad del estudio de estabilidad ante estos sistemas no lineales.

Por otro lado, en la Universidad Politécnica Salesiana se llevó a cabo un prototipo en el que se aplicaron los principios básicos del sistema péndulo invertido con el fin de proporcionarle una herramienta de control clásico para alcanzar la estabilización en la planta a controlar. Así como lo realizado en la Escuela Superior Politécnica del Litoral, donde se desarrolló la planta auto equilibrista mediante los mismos teoremas de control clásicos [27], [28]. Sin embargo, el uso de las herramientas de control óptimo puede proporcionar una mejora significativa en el desempeño de su sistema, especialmente en situaciones donde se requiera precisión y resultados eficaces.

En los últimos años en el Ecuador se esfuerza por mejorar sin parar los procesos con el fin de aumentar las aportaciones en un mercado altamente competitivo. Para lograr esto, es necesario contribuir con innovaciones científicas, tecnológicas y procesos de alta calidad [29]. Por tal motivo la “Universidad Estatal Península de Santa Elena” impulsa dentro de la provincia proyectos de investigación con respecto a los sistemas control automáticos.

En el diseño, modelado e implementación de un control retroalimentado mediante un LQE para la estabilización de un sistema electrónico representado en variables de estado, apuntala hacia la ampliación y el desarrollo del saber en cuanto a la

utilidad de las teorías de control moderno, por medio del estudio analítico detallado de su habilidad controladora en la inestabilidad presente en un proceso donde se aplica el sistema de péndulo invertido, dentro de un campo investigativo y de control.

La planta por emplear y controlar es la de un sistema robótico auto equilibrista, sobre el cual se basa el modelo matemático para comprender de mejor manera el comportamiento de este sistema, realizando una simulación en el simulador numérico. Además, se lleva a cabo la realización del respectivo controlador (LQE) en el simulador mencionado donde se desarrollen las teorías de control moderno y también donde se aplique el algoritmo en la planta balancín, de esta forma analizar los resultados obtenidos.

2.2 Marco Conceptual

A continuación, se definen los conceptos claves que sustentan esta investigación. Esta sección se da una comprensión detallada de los términos y elementos esenciales relacionados con el tema de estudio. A continuación, se explora cómo estos conceptos se entrelazan y contribuyen al desarrollo de la propuesta tecnológica.

2.2.1 Sistema Balancín, péndulo invertido

Un sistema está definido por la combinación de elementos que colaboran entre sí para alcanzar un objetivo específico. No se restringe exclusivamente a sistemas físicos; el término ‘sistema’ abarca también fenómenos abstractos y dinámicos, como los que se manifiestan en el ámbito económico. En este sentido, la noción de sistema debe entenderse de manera amplia, englobando sistemas físicos, biológicos, económicos y otro de naturaleza similar [30].

2.2.1.1 Sistemas lineales invariantes y variantes en el tiempo

Un sistema variable en el tiempo se caracteriza por un comportamiento dinámico que experimenta cambios en medida que avanza el tiempo. En tales sistemas, la salida en un momento específico se ve influenciada no solo por la entrada actual, sino también por las entradas previas y la evolución temporal del sistema. En contraste, un sistema invariable en el tiempo mantiene un comportamiento consistente a lo largo del tiempo. En este tipo de sistema, la salida en un momento dado se determina únicamente por la entrada actual, sin ninguna dependencia de las entradas anteriores o la progresión del tiempo [31], [32].

2.2.1.2 Señal

Las señales, siendo expresiones matemáticas que dependen de una o mas variables independientes, encapsulan datos que describen el comportamiento o las características de algún fenómeno específico [31].

2.2.1.3 Señales continuas y discretas

Las señales en tiempo continuo y las señales en tiempo discreto son dos conceptos fundamentales en el procesamiento de señales y la teoría de sistemas. En el caso de las señales en tiempo continuo como en la figura 2.a, la variable independiente es continua, la que significa que estas señales están definidas para un continuo de valores de la variable independiente. Por otro lado, las señales en tiempo discreto se definen solo en tiempos específicos, por lo tanto, para estas señales, la variable independiente toma solo un conjunto discreto de valores. Los datos muestreados (o una señal discreta) son datos obtenidos para las variables del sistema en intervalos discretos y, por ende, representan una versión discreta de la información original [31], [33].

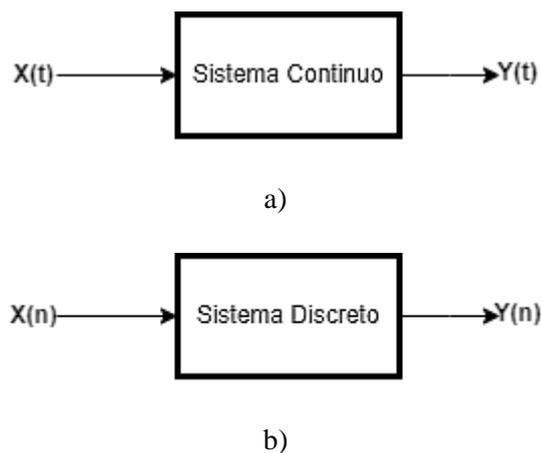


Figura 2. a) Sistema Continuo, b) Sistema discreto.

En resumen, las señales en tiempo continuo ofrecen una representación continua a lo largo de un rango, mientras que las señales en tiempo discreto se manifiestan solo en puntos aislados en el tiempo. La recolección de datos muestreados, o señales discretas la cual es representada por bloques como en figura 2.b, lo que implica recopilar información obtenida. Esta dualidad entre señales continuas y discretas forman la base para comprender el comportamiento de los sistemas en diferentes dominios temporales.

2.2.2 Robot balancín (péndulo invertido)

El robot balancín puede definirse como un sistema mecánico y electrónico que integra dos ruedas con ejes colineales, cada una impulsada por un motor independiente. En este sistema, el péndulo se encuentra fijado en el eje de las ruedas y tiene la capacidad de girar alrededor del mismo. Su punto de gravedad está estratégicamente ubicado sobre el eje de giro. Este importante hay que destacar que este sistema se considera inestable debido a efectos no lineales. La tarea principal del robot balancín es desplazarse de manera autónoma a lo largo de una trayectoria predefinida mientras mantiene el equilibrio. Se puede concebir al sistema robot balancín como una plataforma mecánica compuesta por dos subsistemas acoplados: el cuerpo principal el cual es el péndulo, es la parte superior de la figura 3 y el sistema de rotación ensamblado representando a la rueda [34], [35].

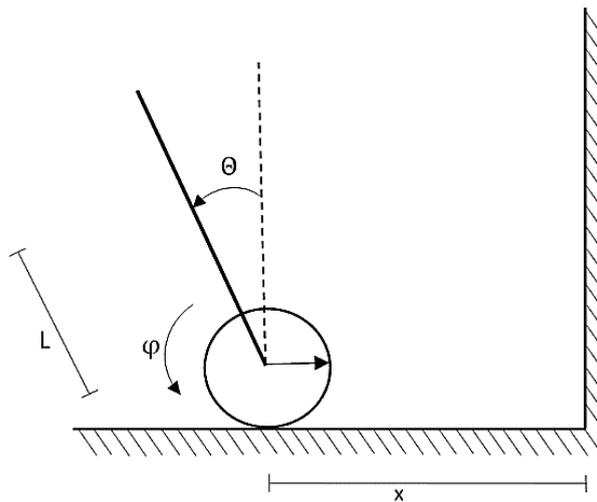


Figura 3. Diagrama de cuerpo libre, péndulo invertido.

En la Tabla 1, se presentan las variables esenciales que posibilitan la cuantificación y examen de las propiedades dinámicas y cinemáticas del péndulo invertido. Estas variables desempeñan un papel crucial en la derivación de las ecuaciones de movimiento que detallan la conducta del sistema.

Tabla 1. Lista de parámetros y constantes de la planta balancín

Variables	Descripción	Unidades
J_p	Momento de inercia del péndulo respecto al centro de masa	[Kg. m ²]
J_r	Momento de inercia de la rueda respecto al centro de masa	[Kg. m ²]
m_p	Masa del péndulo	[Kg]
m_r	Masa de la rueda	[Kg]
M	Masa del carro	[Kg]
$\dot{\varphi}$	Velocidad angular de la rueda	[rad/s]

$\dot{\theta}$	Velocidad angular del péndulo respecto a la vertical	[rad/s]
\dot{x}_{cm}	Distancia horizontal al centro de masa del péndulo	[cm]
\dot{y}_{cm}	Distancia vertical al centro de masa del péndulo	[cm]
l	Distancia desde la base hasta el centro de la masa	[cm]
θ	Ángulo del péndulo en relación con la vertical	° grados
v	Velocidad a lo largo de la dirección tangente a la trayectoria circular.	[km/h]
r	Radio de la trayectoria circular	[m]
s	Longitud de arco	[$\theta \cdot r$]
φ	Desplazamiento angular	[rad]
g	Aceleración debida a la gravedad	[m/s ²]
F	Fuerza normal	[Kg. m]/s ²
F_r	Fuerza de fricción	[u. N]
μ_s	Coefficiente de fricción estática	[N · s/m]
μ_e	Coefficiente de fricción dinámica	[N · s/m]
K_s	Constante de escala.	[V/Ue]
K_t	Constante de torques.	[Nm] / [A]
K_e	Constante electromotriz.	V / rad
R	Resistencia del sistema.	[Ω]
u	Valor de setpoint (Escala).	[bits]
T	Torque aplicado en la dirección de Theta	[N. m]
$x(t)$	Vector de estado en orden (n x 1).	rad, $\frac{rad}{s}$, m, m/s
$y(t)$	vector de salida en orden (p x 1).	[rad]
$u(t)$	Vector de entrada de orden (m x 1).	%
x	Posición.	[m]
\dot{x}	Velocidad	[m/s]
\ddot{x}	Aceleración	[m/s ²]
θ	Posición Angular	[s/r]
$\dot{\theta}$	Velocidad angular	[rad/s]
$\ddot{\theta}$	Aceleración angular.	[rad/s ²]
$A(t)$	El número de variables de estado, representado por n.	n. n
$B(t)$	Siendo que el número de entradas es representado por m, es la matriz de entrada.	n. m
$C(t)$	Siendo que el número de salidas es representado por p, es la matriz de transmisión directa.	p. n
$D(t)$	Es la matriz de transmisión directa.	p. m

2.2.3 Modelado matemático de sistemas

El propósito del control de un sistema dinámico consiste en que este siga una referencia basada en algunas características y tomando cuenta ciertas condiciones. Con la finalidad de lograr este reto, es necesario seguir una secuencia de pasos, siendo el primero de ellos la elaboración de un modelo matemático.

El modelo teórico (matemático) en base a un sistema dinámico se refiere a un grupo de ecuaciones diferenciales que describen con precisión o, al menos, de manera

aproximada, la dinámica del sistema. Cabe destacar que no existe un modelo matemático único para un sistema dado, ya que este puede ser representado de diversas maneras, lo que significa que pueden existir múltiples modelos matemáticos para un mismo sistema, dependiendo del punto de vista que se acoja [18], [30].

2.2.3.1 Ecuaciones dinámicas, energía cinética y energía potencial

En términos generales, las ecuaciones dinámicas se utilizan para describir como la fuerza (o torque) se relaciona con el movimiento de un mecanismo bajo investigación. Este modelo matemático tiene un papel crucial en el diseño de mecanismos y robots, ya que facilita la simulación del movimiento, la optimización y la creación de algoritmos de control [36].

La energía cinética de una planta se compone de la energía cinética de rotación (relacionada con la velocidad del centro de masa) y la energía cinética de translación del cuerpo (asociada a la velocidad lineal del centro de masa) como se muestra en la ecuación 2.2, en la que el parámetro J_b , representa el momento de inercia de un cuerpo con respecto a su centro de giro. Podemos escribir la energía potencial E_p (se define como la energía potencial en la posición vertical) y la energía cinética E_k de la siguiente manera [35], [37]:

$$E_c = \frac{1}{2} J_b \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_b \cdot v_b^2 \quad (2.1)$$

$$E_p = m_b g h \quad (2.2)$$

En las ecuaciones 2.1 y 2.2, E_c representa la energía cinética, E_p representa la energía potencial, J_b es el momento de inercia, $\dot{\theta}$ es la velocidad angular, m es la masa del cuerpo, v_b es la velocidad lineal, g es la aceleración gravitatoria y h es la altura. Estas funciones son las que describen el nexo que hay entre la energía potencial y cinética en la dinámica del robot.

2.2.3.2 Lagrangiana

Esta es una técnica de formación de energía para sistemas lagrangianas subactuados, que aprovecha la dinámica no lineal subyacente para el diseño de control y conduce a leyes de control estabilizadoras válidas en amplias regiones del espacio de fase. En este contexto, las ecuaciones de Lagrange (ecuación 2.3) se emplean para desarrollar el modelo dinámico de una planta partiendo de las ecuaciones de energías cinética y potencial [38], [39].

$$L = E_c - E_p \quad (2.3)$$

2.2.3.3 Las Fuerzas Generalizadas

Al modelar el Sistema bajo perturbaciones, el modelo describe el comportamiento del sistema real de manera más precisa. Las fuerzas generalizadas son las fuerzas que actúan sobre un sistema y se utilizan para describir el movimiento del sistema. En el caso del péndulo invertido, las fuerzas que actúan sobre el sistema son el torque, la fricción y el amortiguamiento viscoso, como se puede expresar en velocidades lineales por lo tanto se lo expresa también el desplazamiento lineal x , para este arreglo se parte del procedimiento de velocidad lineal, como en la ecuación 2.4, a la velocidad angular (ecuación 2.5). [18], [37], [40]:

$$v = r \cdot w \quad (2.4)$$

$$w = \frac{v}{r} \quad (2.5)$$

2.2.3.4 Trabajo del torque del motor, de la fuerza de fricción con el suelo y de la fuerza viscosa.

Cada una de las fuerzas ejercidas sobre el sistema desempeña un papel fundamental en la dinámica de un sistema. El “Trabajo del torque del motor” se refiere a la influencia del motor en la generación de movimiento, ya que el torque es lo que impulsa el giro de un sistema mecánico. La “fuerza de fricción con el suelo” se opone al movimiento y es crucial en situaciones donde un objeto se desplaza sobre una superficie, actuando como una resistencia al avance. Por último, la “fuerza viscosa” está relacionada con la resistencia que un fluido (como líquido o gas) ejerce sobre un objeto en movimiento, lo que afecta la velocidad y la dinámica de dicho objeto. Estas fuerzas son esenciales para comprender y modelar el comportamiento de sistemas balancín [18], [40].

$$W = \int T \cdot d\theta \quad (2.6)$$

$$F_f = \mu \cdot N \quad (2.7)$$

$$F_v = -b \cdot v \quad (2.8)$$

De la ecuación 2.6 W es el trabajo, T es el torque y θ es el desplazamiento angular. Esta ecuación muestra como el trabajo está relacionado al torque, ya que el trabajo es la integral del torque con respecto al desplazamiento angular. En la ecuación

2.7, F_f es la fuerza de fricción, μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal. Por último, en la en 2.8, F_v es la fuerza viscosa, b es el coeficiente de viscosidad y v es la velocidad del objeto.

2.2.3.5 Fases del modelo matemático de un sistema

El modelado matemático es un proceso fundamental para entender y resolver problemas del mundo real mediante la construcción de modelos matemáticos que representen las variables y relaciones relevantes de un fenómeno particular. En la figura 4 se resalta los cuatro pasos principales del modelado matemático – formulación de modelo, aplicación de técnicas matemáticas, interpretación de las conclusiones matemáticas y validación de las predicciones son esenciales para desarrollar de modelos confiables y útiles. A través de estos pasos, se pueden obtener resultados matemáticos y predicciones que pueden ser aplicadas a situaciones reales y ofrecer soluciones y estrategias efectivas para mejorar la situación. La precisión y validez de los resultados obtenidos dependerá de la habilidad del modelador para elegir y utilizar adecuadamente las técnicas matemáticas y validar los resultados con datos reales.

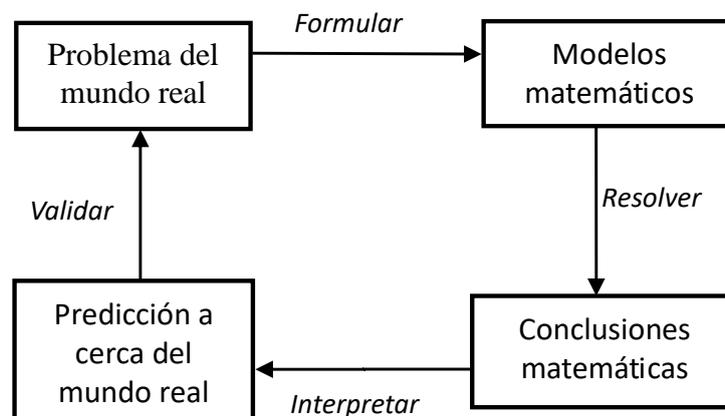


Figura 4. Fases del modelado matemático

- **Formulación del modelo.** Implica identificación y nombramiento de las variables relevantes, así como las simplificaciones del fenómeno mediante el establecimiento de hipótesis para que pueda ser tratado matemáticamente. Asimismo, se requiere de la identificación de las relaciones entre las distintas variables.
- **Aplicación de técnicas matemáticas.** Una vez formulado el modelo matemático, se aplican técnicas matemáticas para llegar a conclusiones

matemática. Esto puede implicar el uso de ecuaciones matemáticas, análisis numérico o simulación [41].

- **Interpretación de las conclusiones matemáticas.** Una vez formulado el modelo matemático, se procede a la aplicación de técnicas matemáticas para obtener conclusiones. Esta etapa puede incluir el uso de ecuaciones matemáticas, análisis numérico o simulación, para que de las conclusiones obtenidas se puedan interpretar como una información sobre el fenómeno y se utiliza para hacer predicciones o explicaciones aplicables al mundo real.
- **Validación de predicción.** Se valida las predicciones comparándolas con nuevos datos reales. Si las predicciones no son precisas, se redefine el modelo o se crea uno nuevo y se vuelve a comenzar el proceso.

2.2.4 Diseño en el espacio de estados

Este enfoque se centra específicamente en las ecuaciones que describen el sistema en cuestión. Admite análisis del comportamiento de las variables internas del sistema en el dominio del tiempo, en lugar del dominio de Laplace, además permite estudiar la relación entre las entradas y salidas del sistema. Este estudio permite la deducción de sistemas que tienen múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO) [42].

2.2.4.1 Estado

Es la particularidad interna del sistema en un momento determinado. La salida del sistema depende tanto del estado actual como de la entrada a recibir. Además, el método para evolucionar el sistema con el paso del tiempo también depende del estado y el método de entrada por la tasa de cambio del movimiento dinámico [42].

2.2.4.2 Variables de estado

Las variables que reflejan el estado en constante evolución de un sistema. Estas variables no necesariamente tienen que ser medidas físicas.

2.2.4.3 Vector de estado

Si para poder explicar plenamente el comportamiento de un sistema determinado se requiere de n variables de estado, entonces esas n variables pueden ser tratadas como los n elementos de un vector x . Ese conjunto de variables se llama vector de estado. Así, el vector de estado de la ecuación 2.9 es un conjunto de valores que identifican exclusivamente el estado del sistema $x(t)$ en cualquier momento dado [30].

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

2.2.4.4 Ecuaciones de estados

Es la matriz de ecuaciones que describen tanto el comportamiento dinámico y las salidas del sistema. Estas son ecuaciones cuyas variables son el vector de estado y el vector de entrada.

2.2.4.5 Espacio de estados

Es un espacio que tiene n dimensiones, y cada una de estas dimensiones corresponde a una de las variables de estado. Cada punto en el espacio de los estados representa un vector de estado diferente, y se encuentra en una posición específica en el espacio en función de los valores tomados por sus variables de estado.

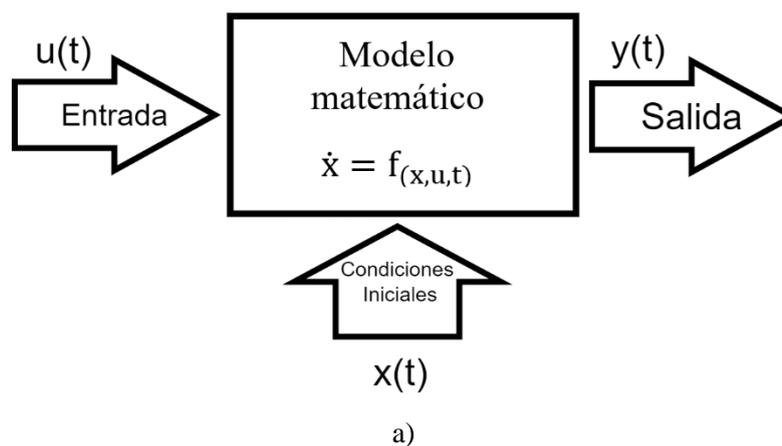


Figura 5. Comportamiento de un sistema en el tiempo [42].

En la figura 5 b se puede apreciar como los ejes que representan las variables de estados dentro del sistema son los que definen el espacio de estados con sus dimensiones. Con ello se tiene una salida a partir de sus entradas, tomar en cuenta que este sistema tiene condiciones iniciales como está en la figura 5 a.

De este sistema se puede representar su comportamiento de esta forma:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

La salida es representada de esta forma:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ &\vdots \\ y_p(t) &= g_p(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t)\end{aligned}$$

Ahora escribimos estas ecuaciones de forma vectorial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \\ \vdots \\ g_p(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_m; t) \end{bmatrix}$$

De manera simple:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u, t) \\ y &= g(x, u, t)\end{aligned}$$

En donde después de haber realizado una representación más simplificada y del proceso de linealizado se obtienen la ecuación 2.10 de estado y la ecuación 2.11 de salida:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \quad (2.10)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (2.11)$$

Donde:

$x(t)$: vector de estado en orden $(n \times 1)$.

$y(t)$: vector de salida en orden $(p \times 1)$.

$u(t)$: Vector de entrada de orden $(m \times 1)$.

$A(t)$: Siendo que el número de variables de estado es representado por n , es la matriz de estado de orden $(n \times n)$.

$B(t)$: Siendo que el número de entradas es representado por m , es la matriz de entrada de orden $(n \times m)$.

$C_{(t)}$: Siendo que el número de salidas es representado por p , es la matriz de transmisión directa de orden $(p \times m)$.

$D_{(t)}$: Es la matriz de transmisión directa de orden $(p \times m)$.

Si las funciones vectoriales f y g no dependen explícitamente del tiempo t , se puede decir que el sistema es invariante en el tiempo. Por lo tanto, estas ecuaciones llegan a simplificarse a:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.12)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.13)$$

Donde 2.12 es la ecuación de estado del sistema lineal e invariante en el tiempo y 2.13 es la de salida para el mismo sistema.

2.2.5 Modelado matemático de sistema en general

Si deseamos crear un modelo matemático de cualquier tipo de sistema, deberemos seguir los siguientes pasos:

- a. Para crear un modelo matemático de un sistema, el primer paso es identificar su tipo, ya sea mecánico, eléctrico, hidráulico, híbrido, térmico, entre otros. Con esta información, se pueden plantear las ecuaciones integro-diferenciales que describen el comportamiento del sistema. Si no se tienen conocimientos sobre estas ecuaciones, es necesario investigar o buscar asesoramiento de expertos en el campo correspondiente. Por ejemplo, para un sistema mecánico, se pueden aplicar las leyes de Newton para plantear las ecuaciones [42].
- b. Expresar matemáticamente las relaciones que describen las variables del sistema y cómo estas cambian en función del tiempo o de otras variables relevantes.
- c. Localiza la(s) entrada(s), la(s) salida(s) del sistema y las variables de estado.
- d. Escoger cuáles son las variables de mayor orden (orden $n+1$) en cada estado del sistema, y luego establecer el vector de estado, empezando por las variables de orden mayor menos uno (orden n). Asimismo, es necesario definir los vectores de entradas y salidas del sistema.

$$x = \begin{bmatrix} x^n \\ x^{n-1} \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

- e. Si contamos con el vector de estado x , es sencillo obtener la derivada del vector de estado, también conocida como x punto (\dot{x}):

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} x^{n+1} \\ x^n \\ \vdots \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

- f. El siguiente paso es observar o interpretar las ecuaciones de estado del sistema. Partiendo de la ecuación 2.12 y 2.13 tenemos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & \cdots & d_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

- g. Sustituir los elementos de las matrices de las ecuaciones de estado por los coeficientes correspondientes de las ecuaciones diferenciales. Para ello, se deben colocar ceros en los elementos faltantes de la matriz, de modo que se tenga una representación completa y precisa de las relaciones matemáticas entre las variables del sistema.

Este proceso permite representar matemáticamente las relaciones entre las variables del sistema y su evolución en función del tiempo o de otras variables relevantes, lo cual resulta útil para comprender su comportamiento y para tomar decisiones informadas sobre su diseño y funcionamiento.

2.2.6 Linealización de sistemas no lineales.

Es posible aproximar el sistema no lineal por medio de un sistema lineal que resulta equivalente al sistema no lineal, siempre y cuando se considere dentro de un rango de operación limitado. Este modelo linealizado, que es lineal e invariante en el tiempo, tiene una gran relevancia en la ingeniería de control, ya que permite analizar y diseñar controladores que logren una respuesta óptima en ese rango de operación [30].

Los modelos simplificados permiten analizar los sistemas de manera más eficiente y diseñar controladores que logren una respuesta óptima en el rango de operación limitado. Si bien existen excepciones a esta técnica, en muchos casos resulta esencial para lograr el control preciso de los sistemas. La linealización de sistemas no lineales es un enfoque clave en la ingeniería de control que permite una comprensión más profunda de los sistemas y un diseño de control más efectivo.

La aproximación lineal es una técnica comúnmente utilizada para analizar y resolver modelos matemáticos no lineales en ingeniería y física. La idea básica es que, para pequeñas perturbaciones alrededor de un punto de equilibrio, el comportamiento del sistema no lineal puede aproximarse por un modelo lineal simplificado. Esto es posible gracias a la linealización, que consiste en tomar la derivada de la ecuación no lineal en el punto de equilibrio y utilizarla como coeficiente de una ecuación lineal. A pesar de que la aproximación lineal simplificada ayuda en gran medida la resolución de ecuaciones no lineales es importante tener en cuenta que esta técnica solo es válida para pequeñas perturbaciones y que la precisión del modelo disminuye a medida que las perturbaciones se vuelven más grandes. Por lo tanto, la aproximación lineal debe ser utilizada con precaución y siempre debe ser verificada experimentalmente.

Para lograr un modelo matemático lineal de un sistema no lineal, se asume que las variables del sistema solo sufren pequeñas desviaciones de una condición de operación específica. Si se tiene la relación entre $y(t)$ y $x(t)$ expresado en 2.20.

$$y = f(x) \quad (2.20)$$

En la ecuación 2.21 se expande en series de Taylor alrededor de este punto, así:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= f(\bar{x}) + \frac{df}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Si $x - \bar{x}$ es un valor pequeño, entonces cabe la posibilidad de no considerar los términos de orden superior en $x - \bar{x}$. Entonces:

$$y = \bar{y} + K(x - \bar{x}) \quad (2.22)$$

Donde

$$\bar{y} = f(\bar{x})$$

$$K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$$

Por lo que se puede reescribir 2.22 de la siguiente manera:

$$y - \bar{y} = K(x - \bar{x}) \quad (2.23)$$

La ecuación 2.23 me indica que $y - \bar{y}$ es directamente proporcional $x - \bar{x}$. El modelo matemático lineal es obtenido por medio de la ecuación relación entre $y(t)$ y $x(t)$ próximo al punto de operación $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$.

En el caso que se tenga una gran no linealidad, resulta conveniente realizar las equiparaciones mediante una secuencia de etapas lineales. Para poder determinar este modelo matemático, consideraremos la cantidad de condicionales requeridas con el fin de plantear la continuidad de todas las etapas lineales [42].

- $[0, x_1)$: en el caso mayor a 0 y menor a x_1 , debe asumirse la linealización respectiva a ese rango.
- $\langle x_1, x_2 \rangle$: en el caso mayor a x_1 y menor a x_2 , se toma en consideración la linealización correspondiente al mismo rango de valores.
- $\langle x_2, \dots \rangle$: en el caso mayor a x_2 y menor a x_2 , continuando así hasta poder completar con el rango requerido.

Partiendo de este concepto de linealizado, se busca representar un sistema no lineal comenzando desde su función de la ecuación 2.24:

$$\dot{X} = f_{(x(t), u(t))} \quad (2.24)$$

Representar y controlar este tipo de sistemas es un desafío debido a su complejidad. Por ejemplo, se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1(t)} &= x_{1(t)} + x_{2(t)}^2 \\ \dot{x}_{2(t)} &= x_{1(t)} + u(t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Donde $x_{2(t)}^2$ de la ecuación 2.25 representa una no linealidad.

La técnica utilizada para transformar las ecuaciones no lineales que describen el comportamiento de un sistema en un modelo lineal consiste en expandirlas en una serie de Taylor centrada en un punto de operación nominal. En esta serie, se desechan los

términos de orden superior a uno ya que se considera que son cercanos a cero, lo que resulta en una aproximación lineal de las ecuaciones. De esta manera, se obtiene un modelo lineal que describe el comportamiento del sistema en torno a su punto de operación nominal [42].

El $x_{0(t)}$ representa un punto nominal que es correspondiente a la entrada $u_{0(t)}$, las cuales están en conjunto con algunas condiciones iniciales fijas y constantes. Por lo tanto, su expansión de Taylor es:

$$\dot{x}_i(t) = f_{i(x_0, u_0)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i(x, u)}}{\partial x_j} \Big|_{x_0, u_0} (x_j - x_{0j}) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_{i(x, u)}}{\partial u_j} \Big|_{x_0, u_0} (u_j - u_{0j}) \quad (2.26)$$

Donde x es de orden $n \times 1$ y u es de orden $p \times 1$.

Sea, $\Delta x_i = x_i - x_{0i}$ y $\Delta u_j = u_j - u_{0j}$, entonces $\Delta \dot{x}_i = \dot{x}_i - \dot{x}_{0i}$. Y teniendo en cuenta a la expresión $\dot{x}_{0i} = f_{i(x_0, u_0)}$, podemos volver a escribir la ecuación 2.26 de la siguiente manera:

$$\Delta \dot{x}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{i(x, u)}}{\partial x_j} \Big|_{x_0, u_0} \Delta x_j + \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_{i(x, u)}}{\partial u_j} \Big|_{x_0, u_0} \Delta u_j \quad (2.27)$$

Expresado de forma matricial, se tiene la ecuación 2.28:

$$\Delta \dot{x} = A^* \Delta x + B^* \Delta u \quad (2.28)$$

donde

$$A^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B^* = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_p} \end{bmatrix}$$

Hay varias opciones disponibles para obtener modelos matemáticos que pueden representar el comportamiento de un sistema en particular como los árboles de decisión, redes neuronales, por análisis estadísticos e inclusive sistemas dinámicos, pero, los modelos más simples se basan en funciones de transferencia y ecuaciones de estado. Sin embargo, estos modelos pueden volverse más complejos al incluir ecuaciones no lineales o discretas [42].

Las ecuaciones de estado son una herramienta comúnmente utilizada en el modelado matemático de sistemas debido a varias ventajas que ofrecen. En primer lugar, las ecuaciones de estado se enfocan precisamente en las ecuaciones que representan el sistema, lo que permite un modelado más preciso. Además, las ecuaciones de estado admiten el análisis en el comportamiento de las variables internas del sistema en el dominio del tiempo, lo que puede ser importante en situaciones donde el análisis en el dominio de Laplace no es adecuado. Asimismo, las ecuaciones de estado facilitan el estudio de sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas (MIMO), lo que los hace especialmente útiles en el diseño de sistemas complejos. En resumen, las ecuaciones de estado son una herramienta poderosa en el modelado matemático de sistemas debido a su capacidad para proporcionar una descripción precisa y detallada del comportamiento del sistema.

2.2.7 Propiedades de los sistemas de espacio de estados

A continuación se explora las propiedades, abordando aspectos como la estabilidad, la controlabilidad y la observabilidad. Este análisis proporciona una base sólida para la comprensión de la teoría del control y su aplicación en el sistema dinámico.

2.2.7.1 Solución de las ecuaciones de estados

Se puede obtener mediante la integración de las ecuaciones de estado, utilizando métodos numéricos o analíticos. La solución analítica se utiliza generalmente para sistemas lineales y puede ser obtenida mediante la diagonalización de la matriz de estado A y la aplicación de una transformación de coordenadas apropiada.

2.2.7.2 Estabilidad en espacio de estados

Se entiende como estabilidad a la característica propia de un sistema de equilibrarse después de haber experimentado una perturbación. En el marco de espacio de estados es la capacidad de un sistema dinámico en el espacio de estados para mantenerse en un estado deseado o equilibrado a lo largo del tiempo, incluso cuando se le somete a perturbaciones o cambios en las condiciones iniciales [42].

En la estabilidad de un sistema dado, se considera de manera general al espacio de estados en 2.12 y 2.13.

Donde se debe comprobar que todos los polos del sistema se encuentran en la región del plano complejo que corresponde a la estabilidad. La región de estabilidad en

el plano complejo se define como el conjunto de puntos que satisfacen la siguiente condición:

$$\text{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (2.29)$$

Donde λ_i son los valores de la matriz A. Si todos los autovalores tienen una parte real negativa, entonces el sistema se considera estable en el espacio de estados. Es importante tener en cuenta que la estabilidad en el espacio de estados no garantiza necesariamente la estabilidad en el sentido de Lyapunov o la estabilidad robusta frente a perturbaciones externas o incertidumbres en los parámetros del sistema. Por lo tanto, es importante realizar un análisis completo de la estabilidad del sistema en diferentes situaciones y bajo diferentes condiciones para garantizar su correcto funcionamiento.

2.2.7.3 Controlabilidad y Observabilidad

Kalman introdujo los conceptos de controlabilidad y observabilidad, esenciales en el diseño de sistemas de control en el espacio de estados. De hecho, los parámetros iniciales de controlabilidad y observabilidad son cruciales para determinar si existe una solución completa en el diseño de sistemas de control [30], [40]. Estos conceptos que a continuación se presentan son importantes en la teoría de sistemas de control en el espacio de estados, ya que permiten determinar si es posible diseñar un controlador efectivo para estabilizar y llevar el sistema a un estado deseado.

- **Controlabilidad.** La capacidad de controlar un sistema es crucial para su operación en los sistemas de procesos. Esta capacidad se conoce como controlabilidad en espacio estados, que permite mover o colocar los polos o eigenvalores del sistema en cualquier lugar del plano utilizando la retroalimentación de estado [40]. La controlabilidad es un concepto clave en el diseño de sistemas de control y su comprensión es esencial para garantizar el rendimiento y la eficacia del sistema.

Presentaremos un método para verificar si un sistema es controlable o no. La controlabilidad es una característica que se relaciona con las matrices A y B del sistema, y no depende de las matrices C y D. Esto significa que la capacidad de controlar el sistema depende únicamente de sus características y de las entradas que se le apliquen, y no de cómo se mida o se procese la información de salida [42].

$$\dot{x}_{(t)} = Ax_{(t)} + Bu_{(t)}$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Estableceremos la definición de una matriz de controlabilidad, que tendrá dimensiones de $n \times nm$. Esta matriz estará compuesta siguiendo la siguiente estructura:

$$\zeta = [A \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.30)$$

Si el rango perteneciente a la matriz de controlabilidad coincide con el orden del sistema ($\text{rango}=n$), podemos concluir que el sistema es controlable. Es importante destacar que n representa el orden de la matriz A del sistema, mientras que m hace referencia al número de columnas de la matriz de entrada B , es decir, la cantidad de entradas que se aplican al sistema [42].

- **Observabilidad.** En [42], Braschi dice “que el sistema de espacio de estados es observable, si a partir de las salidas se pueden estimar todos los estados del sistema”. La observabilidad es un aspecto relevante de los sistemas. En muchos casos, no es posible medir todos los estados de un sistema mediante sensores, sin embargo, si se considera que el sistema es observable, entonces es posible hacer estimaciones de los estados faltantes.

2.2.8 Definiciones generales a cerca de los sistemas de control automático

Estos elementos son fundamentales para entender cómo los sistemas dinámicos responden a las entradas y cómo se puede diseñar estrategias de control efectivas. A través de este análisis introductorio, se busca establecer una base sólida y comprensible antes de adentrarse en aspectos más específicos de la teoría de control automático.

2.2.8.1 Sistemas

Combinación de elementos que trabajan juntos para alcanzar un objetivo específico y no necesariamente se limita a sistemas físicos. El término sistema también se puede aplicar a fenómenos abstractos y dinámicos, como aquellos que se encuentran en la economía. Es importante destacar que la noción de sistema debe ser considerada de manera amplia para incluir sistemas físicos, biológicos, económicos y similares [30].

2.2.8.2 Perturbaciones

En el contexto de sistemas de control el término “perturbación” se refiere a señales no deseadas e impredecibles que influyen negativamente en el valor de la salida de un sistema. Este concepto es utilizado en [30], [42]. Las perturbaciones pueden clasificarse en dos categorías principales según su origen. Aquellos que se generan dentro del sistema se denominan perturbaciones internas, mientras que las perturbaciones externas se originan fuera del sistema y actúan como entradas

impredecibles. En esencia, las perturbaciones representan factores no controlables que pueden introducir variaciones indeseadas en el comportamiento de un sistema de control, lo que destaca la importancia de implementar estrategias de control efectivas para mitigar su impacto.

2.2.8.3 Control realimentado

El termino se emplea para describir una técnica de operación que busca minimizar la diferencia entre la salida real de un sistema y una entrada de referencia, especialmente en presencia de perturbaciones impredecibles, ya que aquellas que son predecibles o conocidas pueden ser compensadas dentro del sistema mediante técnicas de control específicas [30].

2.2.8.4 Variable de controlada y señal de control o variable manipulada

En un sistema de control, la variable controlada es la magnitud o variable de salida del sistema que se desea controlar o mantener en un valor determinado. Por otro lado, la señal de control o variable manipulada es la magnitud o variable de entrada del sistema que se utiliza para controlar la variable controlada. Esta señal de control se ajusta o modifica para lograr el valor deseado de la variable controlada.

2.2.8.5 Entrada

Es la señal o magnitud que se introduce en el sistema para producir una respuesta o salida específica. En otras palabras, la entrada es la variable de entrada o estímulo que se aplica al sistema para obtener una respuesta o cambio en la variable de salida o variable controlada.

2.2.8.6 Salida

Es la variable o magnitud que se produce como resultado de la operación del sistema. En otras palabras, es la variable de salida o respuesta que se genera en resultado de una entrada específica al sistema de control.

2.2.8.7 Plantas

El término “planta” se refiere a cualquier objeto físico que se desea controlar. La planta puede ser una parte de un equipo, como un conjunto de elementos de una máquina que trabajan juntos para realizar una tarea específica. Se alude a esta palabra con el fin de dar a entender a cualquier objeto físico que se desee controlar en un sistema de control [30].

En la propuesta tecnológica a desarrollar, la planta de control es un robot balancín, el cual es un sistema que se compone de varias partes que están conectadas y

tiene la capacidad de balancearse de manera autónoma. En la figura 6(b) se tiene los principales elementos que conforman este sistema, que son: los motores que generan el movimiento, un sensor de posición que detecta la inclinación del robot y un controlador que ajusta la posición de este. El diagrama de cuerpo libre de la figura 6(a) se representa el sistema del péndulo invertido aplicado al balancín.

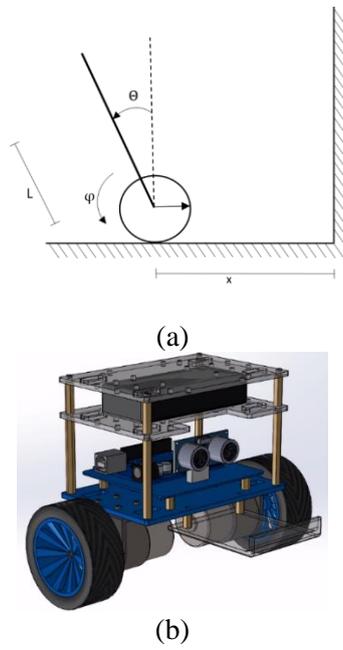


Figura 6.(a)Sistema de péndulo invertido; (b)Robot balancín [18], [43].

A continuación, se muestra la representación en la figura 7 de bloques del proceso de la planta robótica balancín.

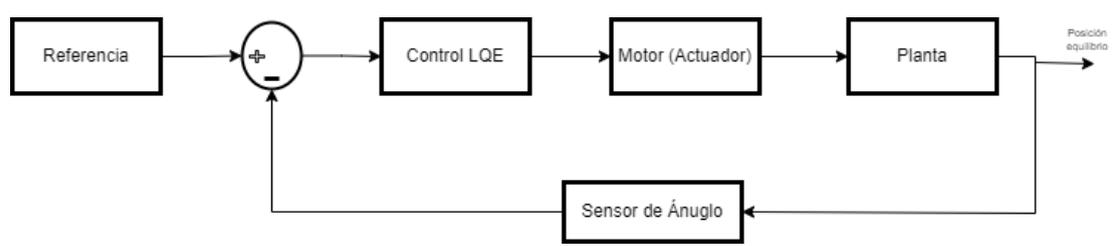


Figura 7.Diagrama de bloque de un sistema de balancín.

2.2.9 Control automático del sistema

El control automático se refiere a la gestión y regulación automático de un sistema a través de un conjunto de acciones de control específicas. Un sistema de control abarca varios componentes, y para visualizar las funciones de cada uno de ellos en la ingeniería de control, comúnmente se utiliza un diagrama de bloques [30].

2.2.9.1 Teoría de Control

La teoría de control es una rama de las matemáticas y la ingeniería que se ocupa del comportamiento de los sistemas dinámicos y de cómo controlarlos. En otras palabras, se trata de hacer que cualquier sistema genere algo deseado. Lo que se genera se llama salida, el sistema se llama planta, y la forma en que el sistema cambia para generar esta salida deseada se llama entrada de control. La teoría de control se ocupa de sistemas dinámicos lineales o no lineales en tiempo continuo o discreto [40]. La comprensión de la teoría de control es esencial para el diseño de sistemas de control eficiente y efectivos en una amplia gama de aplicaciones en la ingeniería y otras aplicaciones.

En sistemas automáticos, las estrategias de control se utilizan para garantizar que los procesos se realicen de manera óptima y se ajusten a las especificaciones deseadas. Estas estrategias se pueden dividir en dos categorías principales: control en lazo abierto y control en lazo cerrado.

2.2.9.2 Sistemas de control en lazo abierto

Se utiliza una señal de entrada predeterminada para controlar el proceso, esto significa que el sistema de control no puede corregir errores en tiempo real, comúnmente es empleado en situaciones en donde las condiciones son estables y predecibles, y donde la precisión no es crítica para el proceso [22].

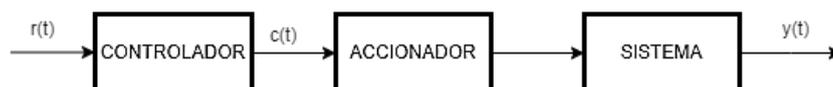


Figura 8. Diagrama de un sistema de control en lazo abierto [22].

En el diagrama previo de la figura 8 se muestra la trayectoria de la señal de entrada desde el controlador hasta el accionador, lo que permite al usuario visualizar la operación del sistema de una manera más simple y directa.

- **Controlador:** es el componente que se encarga de comparar la señal de referencia o consigna con la señal de retroalimentación para determinar la señal de error, y, a partir de esta señal genera una señal de control que se envía al accionador para ajustar el sistema y reducir la desviación entre la salida actual y la salida deseada.

- **Accionador:** El accionador es el componente que transforma la señal de control en una acción específica sobre el sistema. En otras palabras, es el encargado de ejecutar las órdenes del controlador en el sistema que se está controlando. Por ejemplo, en un prototipo de refrigeración, el accionador podría ser un sistema de alimentación de energía que activa la planta de refrigeración, así como los compresores necesarios para alcanzar la temperatura deseada [22].
- **Sistema:** denominado también como planta, la cual es sobre la que se le aplica el control desarrollado con el fin de estudiar con comportamiento y rendimiento.
- **Sistemas de control en lazo cerrado.** Se utiliza una señal de erros de actuación para retroalimentar al controlador. Esta señal es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación, que puede ser la señal de salida del sistema o una función de la señal de salida y sus derivadas e integrales. El objetivo de esta retroalimentación es reducir el error y ajustar la salida del sistema para que alcance un valor deseado.

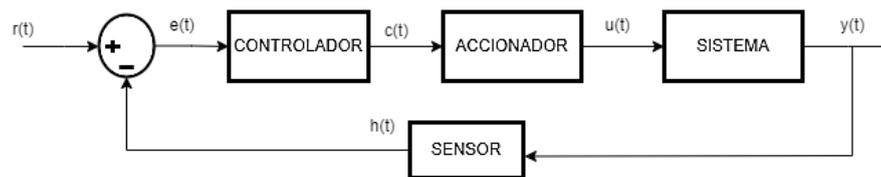


Figura 9.Diagrama de un sistema de control en lazo cerrado [22].

En la figura 8 se puede apreciar que, a diferencia del sistema de lazo abierto, este presenta una retroalimentación que le permite ajustar y controlar su comportamiento, también empleado para medir la salida actual del sistema y compararla con la salida deseada o esperada.

- **Error:** Se calcula restando la señal de retroalimentación de la señal de entrada. Esta señal de error se utiliza para detectar cualquier desviación entre la salida actual del sistema y la salida deseada, se emplea esta señal de error para realizar ajustes a la señal de la variable de control [22].
- **Sensor:** este se emplea para medir una magnitud física o una variable del proceso que se está controlado, como la temperatura, la presión, la velocidad, la posición, entre otros. El sensor convierte la magnitud física o la variable en una señal eléctrica o digital que puede ser interpretada por el controlador del sistema.

2.2.10 Diseño del control por realimentación de estados basado en el método de ubicación de polos.

Método de diseño ampliamente reconocido como la técnica de colocación de polos o asignación de polos. Se considerará que todas las variables de estado se pueden medir y están disponibles para la retroalimentación [44]. La metodología de diseño se inicia mediante la identificación de los polos deseados en lazo cerrado a partir de la respuesta transitorio y/o las especificaciones relacionadas con la respuesta en frecuencia. Estas especificaciones relacionadas con la respuesta en frecuencia. Estas especificaciones pueden incluir la velocidad, la razón de amortiguamiento y el ancho de banda, junto con los requisitos en estado estacionario [30].

Supóngase que se decide que los polos en lazo cerrado deseados estén en $s = \mu_1$, $s = \mu_2$, ..., $s = \mu_n$. Al seleccionar una matriz de ganancias adecuada para retroalimentación del estado, es posible lograr que el sistema tenga los polos en lazo cerrado en las posiciones deseadas, siempre que el sistema original sea de estado completamente controlable.

2.2.10.1 Diseño empleando ubicación de polos

Seleccionar solo los polos dominantes en lazo cerrado, como se hace en el diseño convencional, contrasta con el enfoque actual de asignación de polos, que determina todos los polos en lazo cerrado [30]. Partiendo de la de espacio de estados (2.12 y 2.13), se selecciona la señal de control:

$$u = -Kx \quad (2.31)$$

Esto implica que la señal de control u (2.31) se calcula a partir de un estado instantáneo. Este método se denomina realimentación del estado. La matriz K , de tamaño $1 \times n$, el cual es la matriz de ganancia de la realimentación de estado. Se asume que cada una de las variables de estado están accesibles para la realimentación [30].

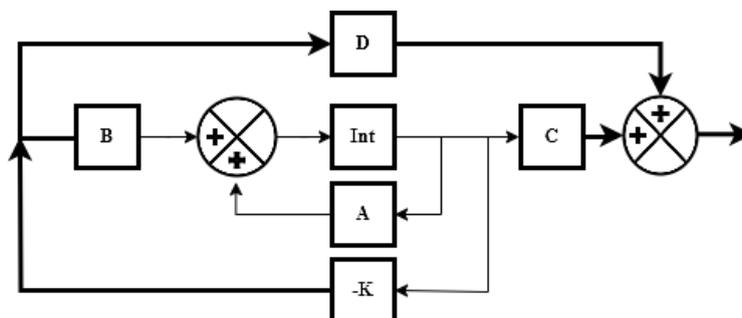


Figura 10. Sistema de control en lazo cerrado $u = -Kx$ [30].

En el sistema ilustrado en la figura 10, que opera en lazo cerrado sin entradas, su propósito es mantener la salida a cero. Debido a posibles perturbaciones, la salida puede desviarse de cero, pero regresará a la entrada de referencia cero gracias al esquema de realimentación del estado del sistema. Este tipo de sistema, en el que la entrada de referencia siempre es cero, se denomina sistema regulador [30].

Al reemplazar la ecuación (2.30) en la ecuación 2.12 se obtiene:

$$\dot{x} = (A - BK) x(t)$$

La solución de esta ecuación es:

$$x(t) = e^{(A-BK)t}x(0) \quad (2.32)$$

Donde $x(0)$ es el estado inicial causado por perturbaciones externas. La estabilidad y las características de respuesta transitoria se determina mediante los valores característicos de la matriz $A-BK$. Si se selecciona adecuadamente la matriz K , $A-BK$ se convierte en una matriz asintóticamente estable, y para cualquier $x(0) \neq 0$, es posible hacer que $x(t)$ tienda a 0 conforme t tiende a infinito.

Los valores propios de la matriz $A-BK$ se conocen como polos del regulador. Si estos polos se colocan en el semiplano izquierdo del plano s , entonces $x(t)$ tiende a 0 cuando t tiende a infinito [30].

2.2.10.2 Cálculo de la matriz K utilizando la matriz de transformación T

La matriz de valores de retroalimentación K , que determinan que los eigenvalores de $A-BK$ sean k_1, k_2, \dots, k_n (valores deseados), se calcula siguiendo los pasos que se describen a continuación (si k_i es un eigenvalor complejo, su conjugado también debe ser un eigenvalor de $A-BK$).

1) Verifique la condición de controlabilidad para el sistema. Si el sistema es completamente controlable en el estado, proceda con los siguientes pasos [30].

2) Partiendo del polinomio característico de la matriz A :

$$|sI - A| = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Establece los valores de a_1, a_2, \dots, a_n .

3) Halle la matriz de transformación T que convierte la ecuación de estado del sistema a su forma canónica controlable. No es necesario expresar la ecuación de estado en la forma canónica controlable; lo funcional es encontrar la matriz T. La matriz de transformación T se obtiene a través de la siguiente ecuación [30].

$$T = MW$$

Aquí M es la matriz de controlabilidad (2.33):

$$M = [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (2.33)$$

Y:

$$W = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Donde las a_i son los coeficientes del polinomio característico.

4) Utilizando los eigenvalores deseados (los polos deseados en lazo cerrado), escribir el deseado polinomio característico:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_n) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n$$

Y establecen las magnitudes de $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

5) La matriz de valores de realimentación perteneciente al estado K requerida se halla a partir de la ecuación 2.34 [30].

$$K = [\alpha_n - a_n \ \alpha_{n-1} - a_{n-1} \ \dots \ \alpha_2 - a_2 \ \alpha_1 - a_1]T^{-1} \quad (2.34)$$

2.2.10.3 Determinación de la matriz K mediante la fórmula de Ackerman

Existen varias formas de calcular el valor correcto de la matriz de ganancia de estado en función de las ubicaciones dadas de los polos. En este proyecto de titulación, la ganancia de retroalimentación se determina utilizando la fórmula de Ackerman. Según esta fórmula, la matriz de ganancia de estado K se obtiene al resolver la ecuación [45].

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \cdot \zeta^{-1} \cdot \alpha(A) \quad (2.35)$$

En el cual ζ es la matriz de controlabilidad de la ecuación 2.35 y $\alpha(A)$ está definida por:

$$\alpha(A) = A^n + \alpha_1A^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}A + \alpha_nI \quad (2.36)$$

Donde $I^{(n \times n)}$ corresponde a la matriz identidad ($n \times n$) y los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son obtenidos de los polinomios característicos deseados.

$$s^n + \alpha_1 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n \quad (2.37)$$

El uso de la fórmula de Ackerman es viable debido a que el sistema en este documento está bien acondicionado y tiene un número de orden considerable para el uso de este recurso matemático [45].

2.2.10.4 Diseño de servosistemas

Cuando la planta carece de un integrador (planta de tipo 0), la estrategia fundamental para diseñar un servosistema de tipo 1 implica la incorporación de un integrador en la trayectoria directa entre el comparador de error y el sistema físico [30].

En este contexto, se introduce una metodología de diseño para servomecanismos que fusiona el enfoque clásico de agregar un término integral de error para lograr un sistema de tipo 1, que garantiza un error de seguimiento estacionario nulo para entradas de referencia escalón, con nuestros métodos para el diseño de retroalimentación de estados. Estos métodos buscan obtener estabilidad en lazo cerrado y características de respuesta transitoria deseables [46].

Este enfoque muestra robustez frente a la incertidumbre en la ecuación e lazo abierto, ya que la eficiencia de seguimiento en estado estacionario se mantiene intacta siempre que se conserve la estabilidad en lazo cerrado [46]. En esta sección, nos concentramos en el caso de una sola entrada y salida, y aplicamos las siguientes suposiciones adicionales:

- La ecuación de estado en lazo abierto, representada por el par A, B , es controlable.
- La ecuación de estado en lazo abierto no tiene ningún polo/autovalor en $s=0$.
- La ecuación de estado en lazo abierto no posee ningún cero en $s=0$.

Nuestra ley de control será de la forma:

$$\dot{\xi} = r(t) - y(t) \quad (2.38)$$

$$u(t) = -Kx(t) + k_1 \xi(t) \quad (2.39)$$

Donde $r(t)$ es la señal de referencia de paso que la salida $y(t)$ debe seguir. Al igual la derivada temporal $\dot{\xi}(t)$ para igualar el error de seguimiento $r(t)-y(t)$, vemos que $\xi(t)$ representa la integral del error de seguimiento [46].

Aplicando las transformadas de Laplace bajo la condición inicial cero $\xi(0^-) = 0$ da:

$$s\xi(s) = R(s) - Y(s) = E(s)$$

$$\xi(s) = \frac{E(s)}{s} \quad (2.40)$$

Esto indica que el término de error integral (ecuación 2.40) introduce un polo en lazo abierto en $s=0$. La suposición 2 está presente para evitar que la función de transferencia asociada con la ecuación de estado en lazo abierto contribuya con un polo $s=0$ por sí misma, en cuyo caso el nuevo estado variable $\xi(t)$ no sería necesario. La suposición 3 impide que el polo en $s=0$ introducido por la ley de control sea cancelado por un cero en $s=0$. Por lo tanto, podemos asegurar que el término de error integral en la ley de control da como resultado un sistema de tipo 1 [46]. El resto de la ley de control se puede expresar como la ecuación 2.41:

$$u(t) = -[K - k_1] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Lo interpretamos como una ley de retroalimentación de estados que implica el vector de estado aumentado de dimensión $(n + 1)$, que consta del vector de estado en lazo abierto $x(t)$ junto con el estado del integrador $\xi(t)$. El esquema de bloques asociado al sistema en lazo cerrado se muestra en la figura 11, donde “A, B planta” se refiere a la ecuación diferencial de estado en lazo abierto en la ecuación diferencial [46].

La conexión entre la ley de control de retroalimentación y el sistema en lazo abierto da como resultado la ecuación de estado en lazo cerrado de dimensión $(n + 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_1 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (2.41)$$

$$y(t) = [C \ 0] \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

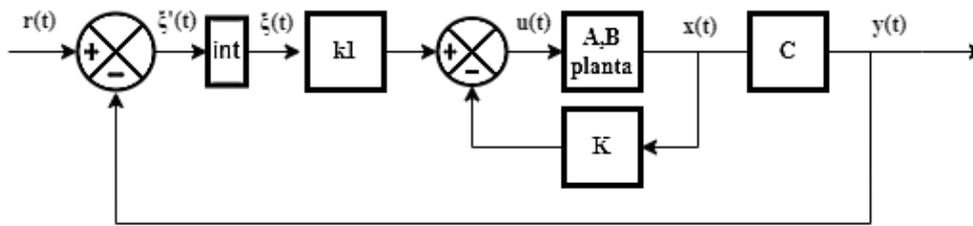


Figura 11. Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado [46].

La estabilidad del sistema en lazo cerrado de la figura 11 y la forma en que responde transitoriamente están dictadas por los $(n+1)$ autovalores del sistema en lazo cerrado de tamaño $(n + 1) \times (n + 1)$.

$$\begin{bmatrix} A - BK & BK_1 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [K \quad -k_1] \quad (2.43)$$

Para situar arbitrariamente estos valores propios de lazo cerrado, es necesario que:

$$\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

Sea un par controlable [46].

Cabe destacar que si la matriz:

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

Posee un rango $n+1$, entonces el sistema definido por la ecuación 2.41 es completamente controlable [46].

2.2.11 Estimador Lineal Cuadrático

2.2.11.1 Ruido Blanco Gaussiano

El ruido blanco representa una señal aleatoria o proceso estocástico que se distingue por la falta de correlación estadística entre sus valores de señal en diferentes momentos temporales. Esto se traduce en una densidad espectral de potencia (PSD) constante, manifestándose gráficamente como una curva plana. En otras palabras, esta señal abarca todas las frecuencias disponibles, y todas estas frecuencias presentan la misma intensidad de potencia. En un contexto discreto temporal, el ruido blanco se presenta como una señal discreta, con sus muestras consideradas como una señal discreta, con sus muestras consideradas como una secuencia de variables aleatorias sin

correlación serial, todas con una media de cero y varianza finita. Específicamente, si cada muestra sigue una distribución normal con media cero, se denomina ruido blanco gaussiano [47].

En una señal aleatoria que tiene igual intensidad en todas las frecuencias audibles. En el contexto de sistemas electrónicos, el ruido blanco se refiere a señales aleatorias que afectan los datos, generalmente modeladas como una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con una distribución gaussiana.

Una de las complicaciones al utilizar sensores radica en la presencia del ruido, que se define como una señal aleatoria sin correlación estadística entre sus valores. Esto implica que no hay manera de prever su desenvolvimiento futuro a pesar de conocer su valor en un momento dado t . En este contexto existe una conexión intrínseca entre el ruido blanco gaussiano y la función de densidad de probabilidad, ya que cada medición se ajusta a la mencionada función, generando una distribución gaussiana con una media μ y una varianza σ^2 [48].

Por esta razón, postulo que la incertidumbre asociada a las mediciones sigue una Distribución de Probabilidad. En consecuencia, el Filtro de Kalman incorpora la distribución normal en su algoritmo.

➤ **Modelo del Ruido Gaussiano**

Para esta propuesta tecnológica, se emplearon herramientas matemáticas descriptivas con el fin de determinar la varianza del ruido del sensor. Este valor desempeñará un papel crucial en la actualización de la fase de predicción, donde al valor del error estimado se incrementará por la magnitud de la varianza, como ilustra en la ecuación 2.44.

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.44)$$

Donde:

- μ es la media de la distribución.
- σ es la desviación estándar de la distribución.

En el caso del ruido gaussiano, el proceso consiste en una secuencia de estas variables aleatorias. Si consideramos n instantes de tiempo, el ruido gaussiano $W(t)$ en cada instante de t se modela como una variable aleatoria con distribución normal:

$$W(t) \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (2.45)$$

Aquí, $N(\mu, \sigma^2)$ indica una distribución normal con media μ y varianza σ^2 .

2.2.11.2 Estimador Filtro de Kalman

En 1960, el ingeniero electrónico R.E Kalman publicó su tan popular trabajo en el que describe una solución recursiva a los problemas de filtrado de datos discretos lineales, problemas que presentaban el filtro antecesor desarrollado por el ingeniero Wiener el cual tenía limitaciones matemáticas [9]. En el transcurso de los años, gracias al avance en la computación digital, el filtro de Kalman ha sido estudiado en las cuales se ha encontrado en variados campos de aplicación, especialmente en la de navegación autónoma y asistida [11].

Es muy común en estadísticas y sistemas de control, el filtro de Kalman, también conocido como Estimador Lineal Cuadrático (LQE, Lineal Quadratic Estimator) es un algoritmo muy utilizado en estadísticas y sistemas de control que permite estimar los parámetros de un sistema a partir de mediciones inexactas, proporcionando además una estimación de la incertidumbre de las estimaciones. El verdadero valor radica en su capacidad para estimar parámetros del sistema que no pueden medirse u observarse con precisión [40]. Sin embargo, es importante tener en cuenta que su eficacia depende en gran medida de la calidad de las mediciones y de la precisión del modelo utilizado. El filtro estimador es una técnica poderosa para la estimación de parámetros y la predicción de estados en sistemas complejos.

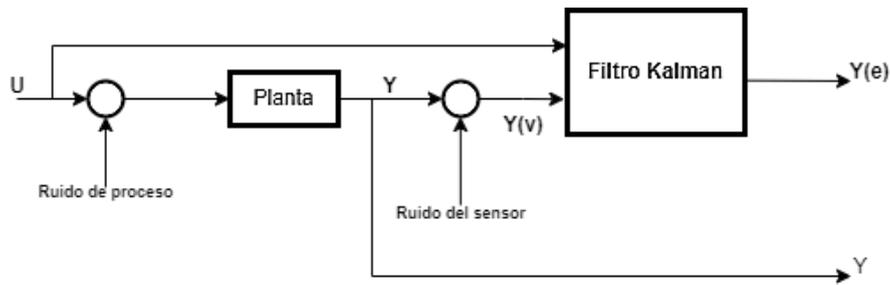


Figura 12. Diagrama de bloques del filtro de Kalman [40].

El diagrama de bloques del filtro de Kalman como se en la figura 12 es una representación visual del proceso de estimación y predicción de estados en un sistema dinámico. Permite comprender fácilmente cómo se combinan las mediciones y las estimaciones previas para obtener una estimación más precisa del estado actual del sistema. Además, el diagrama de bloques ayuda a identificar claramente los puntos críticos donde pueden surgir errores y a diseñar estrategias para minimizarlos.

La implementación del filtro de Kalman se divide en dos pasos: la Predicción y la Actualización. En la Predicción se utiliza el modelo de evolución, el estado anterior y la incertidumbre del modelo para estimar el estado siguiente. En la Actualización, se incorpora la medición y se compara con la estimación previa, ponderando ambos valores según su incertidumbre. De esta forma, se obtiene una estimación más precisa del estado actual del sistema [18]. En resumen, la implementación del filtro de Kalman consta de dos pasos complementarios que permiten estimar y actualizar el estado del sistema de manera efectiva

Se procede a detallar cada uno de los pasos empezando por las ecuaciones utilizadas para llevar a cabo los dos pasos: Predicho y la Actualización.

2.2.11.3 Predicción

Empieza relacionando dos ecuaciones entre sí, los cuales son el estado \hat{x}_{k-1} , y el estado \hat{x}_k utilizando la matriz de predicho F_k .

$$\hat{x}_k = F_k \hat{x}_{k-1} \quad (2.22)$$

A la **ecuación 2.22** se le agrega un vector de modificación de esta, se lo llama como vector de control \vec{u} , y el estado \hat{x} el cual se afecta por el vector de control y la matriz de control B:

$$\hat{x}_k = F_k \hat{x}_{k-1} + B_k \vec{u}_k \quad (2.23)$$

Como varía la matriz de covarianza entre dos estados, lo siguiente:

$$\text{cov}(\hat{x}_k) = P_k \text{ cov}(F_k \hat{x}_k) + B_k \bar{u}_k \quad (2.24)$$

Se la añade la incertidumbre al modelo, la que es representada por una Q_k , de la que se tiene:

$$P_k = F_k P_{k-1} F_k^t + Q_k \quad (2.25)$$

2.2.11.4 Actualización

Tomando en consideración que z_k se establece la actualización, además llamada Innovación o error:

$$\tilde{y}_k = z_k - \hat{z}_{k|k-1} = z_k - H_k \hat{x}_{k|k-1} \quad (2.26)$$

Innovación o covarianza de Innovación. En este punto, se incorpora la incertidumbre en la medición R_k :

$$S_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k \quad (2.27)$$

De ahí la ganancia óptima de Kalman:

$$K_k = P_{k|k-1} H_k^T S_k^{-1} \quad (2.28)$$

Estado estimado después del evento:

$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k \tilde{y}_k \quad (2.29)$$

Matriz de covarianza estimada después del evento:

$$P_{k|k} = (I - K_k H_k) P_{k|k-1} \quad (2.30)$$

Las matrices H y F se consiguen del filtro de Kalman extendido no lineal, el cual aproxima linealmente alrededor del estado estimado:

$$H_k = \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x_{k-1}} \quad F_k = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_{k-1}} \quad (2.31)$$

El filtro de Kalman se aplica en diversas áreas de la tecnología. Por ejemplo, es comúnmente utilizado en la guía, navegación y control de vehículos, como aviones y robots de exploración. Además, es una herramienta importante en el procesamiento de señales y en la econometría [49].

2.2.12 Sistema robótico-electrónico

2.2.12.1 Robótica

- **Robot móvil.** Es un tipo de robot que puede desplazarse de manera autónoma en su entorno utilizando ruedas, patas, orugas u otros medios

de locomoción. Estos robots se utilizan en una variedad de aplicaciones, desde la exploración de planetas hasta la limpieza de hogares y la entrega de paquetes en empresas de comercio electrónico.

- **Rueda fija.** La planta del robot está conectado al eje de la rueda. Lo que está estrechamente relacionado con su capacidad de tracción [50]. La figura 13 ilustra esta relación entre el esqueleto, el eje y la tracción del robot.

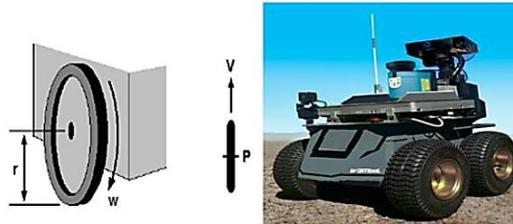


Figura 13. Rueda fija, ejemplo [50].

- **Robot autónoma.** La capacidad de un robot para operar de forma independiente mediante su programa interno se conoce como autonomía. Esto significa que no necesita la intervención directa del operador para realizar sus tareas. Sin embargo, es importante tener en cuenta que un robot no es completamente autónomo, ya que aún necesita ser programado para alcanzar sus objetivos y no posee inteligencia propia [19].

2.2.12.2 Robot balancín

Un robot balancín (también conocido como “inverted pendulum robot” en inglés) es un tipo de robot que se asemeja a un péndulo invertido. Se caracteriza por tener un cuerpo que se mantiene en equilibrio en posición vertical sobre una base móvil y se utiliza principalmente en aplicaciones de control y estabilización en tiempo real.

2.2.12.3 Componentes hardware

- **Microcontrolador.** Este constituye el núcleo esencial de una aplicación embebida y se configura como un circuito integrado. Este componente, análogo a una computadora de dimensiones reducidas, incorpora sistemas para gestionar las entradas y salidas. Asimismo, integra un procesador y cuenta con memoria, que incluye tanto la capacidad de almacenar el programa como las variables asociadas (flash

y RAM). En esencia, opera como una versión en miniatura de una PC y desempeña la función de automatizar procesos y llevar a cabo el procesamiento de información [51].

- **Puente H.** Es un circuito integrado controlador de motores de corriente continua (DC) que utiliza transistores de salida con estructura de baja resistencia. Se pueden seleccionar cuatro modos de operación diferentes, como el movimiento en sentido horario, el movimiento en sentido antihorario, el freno corto y el modo de parada [52].
- **Sensor giróscopo-acelerómetro.** Este recopila datos de un giroscopio y acelerómetro integrados en el módulo mientras sincroniza el muestreo de datos a una tasa definida por el usuario. El conjunto de datos obtenido por el sensor incluye datos de giroscopio de 3 ejes, datos de acelerómetro de 3 ejes y datos de temperatura. La salida calculada del dispositivo al procesador del sistema también puede incluir datos de dirección de un magnetómetro digital de terceros de 3 ejes [53].
- **Motor DC.** es un pequeño motor con engranajes que utiliza dos encoder como sensores para detectar tanto la velocidad como la dirección de rotación. La relación de reducción del motor tiene cierto valor determinado, lo que lo hace útil en aplicaciones que requieren un alto par y una velocidad reducida, como en los robots móviles auto equilibristas [54].
- **Módulo Bluetooth.** El módulo de comunicación inalámbrica viene configurado de fábrica para operar en dos modos distintos: maestro y esclavo. En su modalidad de maestro, puede establecer conexiones con otros dispositivos Bluetooth, mientras que en su modo esclavo está diseñado para aceptar solicitudes de conexión provenientes de otros dispositivos. Este módulo integrado en algún proyecto brindaría la posibilidad de habilitar un control remoto, permitiendo gestionar diversas funcionalidades de manera inalámbrica desde un smartphone o una laptop según las necesidades y preferencias [55].

2.2.12.4 Componente software

- **Simulador numérico**

Los simuladores numéricos permiten realizar simulaciones en condiciones controladas y ajustar los parámetros para analizar el comportamiento del sistema bajo diferentes escenarios. Se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, desde la ingeniería y la física hasta la biología y la economía.

➤ **Proteus**

Proteus es un programa de diseño electrónico que permite simular, diseñar y verificar circuitos electrónicos antes de construirlos físicamente. Es ampliamente utilizado por ingenieros y diseñadores de circuitos electrónicos en la industria para diseñar y validar circuitos de manera rápida y precisa. Proteus incluye una amplia variedad de componentes electrónicos y dispositivos, lo que lo convierte en una herramienta útil para el diseño de circuitos de diferentes niveles de complejidad. Además, también ofrece una interfaz gráfica de usuario intuitiva y fácil de usar, lo que lo convierte en una herramienta atractiva para diseñadores novatos y estudiantes.

Haremos uso de esta aplicación para observar cómo se comporta el hardware que emplearemos una vez que lo carguemos con nuestro código. Gracias a esta herramienta podemos simular tanto los componentes como sus interconexiones.

El entorno de Proteus VSM se basa en este software de captura de esquemas probado, que permite la entrada y el desarrollo de diseños electrónicos. Proteus Schematic es un producto consolidado y bien establecido que combina una interfaz fácil de usar con herramientas de edición poderosas. Este software permite la captura esquemática tanto para el diseño de PCB como para la simulación de circuitos. Los diseños que se prueban en Proteus VSM también se pueden utilizar para el diseño de PCB, ya sea con nuestros propios productos de diseño de PCB o con herramientas de terceros. ISIS, el software de diseño de circuitos de Proteus, también proporciona un alto grado de personalización de la apariencia del dibujo, lo que permite ajustar detalles como anchos de línea, estilos de relleno y fuentes. Estas capacidades se utilizan para crear los gráficos necesarios para la animación de los circuitos [56],[28].

➤ **Programa de cálculo para simulación de sistemas de control**

Este software fusiona un ambiente de escritorio mejorado para los análisis iterativos y la creación de diseños con un lenguaje de programación que permite expresar las operaciones matemáticas de matrices y arreglos de forma directa. Esta combina una plataforma de trabajo optimizada con un lenguaje de programación que

facilita la manipulación de datos matriciales [57]. Esta plataforma de escritorio y lenguaje de programación simplifican significativamente el trabajo de los usuarios en el campo de las matemáticas y la ingeniería.

Estos programas no han dejado de ser las herramientas adecuadas ya que están caracterizados por la amplia gama de funciones y características que permiten entre otras actividades, el diseño y simulación de sistemas, para evaluar su rendimiento. Además, cuentan las herramientas de comunicación con los que se puede interactuar con tarjetas de desarrollo.

➤ **Arduino IDE**

Es un entorno de desarrollo integrado (IDE), abreviatura de “Integrated Development Environment” en inglés, se refiere a un software que comprende un conjunto de utilidades de programación. Puede estar enfocado exclusivamente en un lenguaje de programación específico o ser compatible con varios. Un IDE es una plataforma de programación que se presenta como una aplicación única, que incluye un editor de código, un compilador, un depurador y un generador de interfaz gráfica (GUI). Además, en el contexto de Arduino, incorpora las herramientas necesarias para cargar el programa ya compilado en la memoria flash del dispositivo hardware [58].

➤ **Herramienta de programación en bloques Simulink**

Es un paquete de simulación de sistemas dinámicos que ofrece diversas ventajas o notables fortalezas, como una sintaxis de programación intuitiva y amigable para el usuario, algoritmos numéricos de alta calidad para diversos análisis numéricos, gráficos potentes y fáciles de usar, sintaxis de comandos sencillos para realizar cálculos y una variedad de complementos como cajas de herramientas y matrices reales y complejas, incluidas matrices dispersas como tipos de datos fundamentales [59].

➤ **Comunicación Bluetooth.**

Bluetooth fue creado en 1994 para eliminar la necesidad de cables en las conexiones de datos mediante el uso de transmisiones de radio. La versión Bluetooth 2.1, también conocida como BR/EDR, se volvió muy popular y permitió el emparejamiento con dispositivos periféricos como auriculares o teléfonos móviles para transmitir datos de forma inalámbrica [60], por lo cual se hace uso de esta herramienta de comunicación basándonos en el conocimiento conceptual adquirido del mismo y de las funcionalidades que esté presente.

Esta tecnología hace posible la comunicación incluso en situaciones donde hay obstáculos y distancias significativas, como por ejemplo de hasta 100 metros. Un ejemplo de uso podría ser la transmisión inalámbrica de archivos de música desde un teléfono móvil a un estéreo para automóvil. Además, esta tecnología es útil para conectar dispositivos como teclados y ratones a una computadora de escritorio sin la necesidad de cables [19].

➤ **Ventajas y desventajas de Bluetooth**

El objetivo principal de esta tecnología fue simplificar la vida humana, lo que generó numerosas ventajas, como la posibilidad de conectar dispositivos con ordenadores o entre ellos si estaban diseñados con esta tecnología. Este hecho se puede apreciar cuando emparejamos dispositivos como una cámara sin necesidad de conectarlos físicamente. La transferencia de archivos de cualquier tipo se volvió más sencilla que nunca. Sin embargo, a pesar de estas ventajas, esta tecnología presentaba una limitación importante que posteriormente llevó a su reemplazo por mejoras tecnológicas: la distancia de conexión era limitada, lo que requería que los dispositivos estuvieran relativamente cerca uno del otro, y cualquier obstáculo en el camino podía impedir la conexión dependiendo del material de este [19].

2.3 Marco Teórico

En este apartado se procede a compartir varios estudios de investigación que han sido analizadas para proporcionar orientación en la propuesta de titulación a desarrollar.

En la propuesta tecnológica “DISEÑO, CONSTRUCCIÓN Y CONTROL DE UN ROBOT BALANCÍN” que se llevó a cabo en el Instituto Balseiro por Javier Pincin en el año 2016, donde se realizó un dispositivo robot balancín en el que se usó técnicas avanzadas de control como el regulador lineal cuadrático para la planta ya menciona y empleó la herramienta del filtro de Kalman en el sistema aportando así en la estabilización del mismo, como para el seguimiento de referencias de posición [18].

En el artículo realizado por Ye, Joshua y Mie; “MODELING, SIMULATION AND FABRICATION OF A BALANCING ROBOT” de la Universidad de Harvard se desarrolló el modelado y se demostró un robot balancín utilizando retroalimentación de estado completo y filtrado de Kalman, lo que ha demostrado la importancia del filtro de Kalman para lograr la estabilización del sistema. Sin este filtro, el alto nivel de ruido presente en el sistema haría casi imposible lograr la estabilización del robot [17].

En el trabajo de tesis “MODELLING AND CONTROL OF A SELF-BALANCING MOTORCYCLE” realizado por el ingeniero mecánico Nikolaos Marios en la Universidad de Thessaly el año 2022, presentó el diseño de diferentes tipos de controladores y observadores con el fin de estabilizar el sistema de manera rápida, para ello empleó varias teorías de control entre las cuales aplicó el control lineal cuadrático aquí el filtro de Kalman jugó un papel importante ya que se necesitó hacer frente a los problemas en la rapidez de la tasa de decaimiento en el estimador y el impacto del sensor de ruido en la matriz de ganancia, lo que permitió la reducción en el error de estimación a lo largo del tiempo. Debido a los procesos de linealización la herramienta de control LQG diseñada llevó a tener una mayor consideración de las mediciones en los sensores más que en el modelo del sistema [40].

Iwendi, Algani, Anajamba, Alfakeeh, Zhang y Bashir desarrollaron en su proyecto “ROBUST NAVIGATIONAL CONTROL OF A TWO-WHEELED SELF-BALANCING ROBOT IN A SENSED ENVIRONMENT” en el año 2019, un robot que mantiene su estabilidad en dos ruedas y un control PD-PI basado en el algoritmo del filtro de Kalman a lo largo del proceso de navegación, tiene la capacidad de mantener la estabilidad y evitar obstáculos repentinos y constantemente cambiantes en el entorno que percibe. Con el algoritmo de filtro Kalman se puede mantener la estabilidad en un entorno detectado [61].

En el año 2019 se llevó a cabo una propuesta tecnológica en el artículo “BALL AND BEAM TRACKING APPLICATION WITH LINEAR QUADRATIC CONTROL DESIGN” en la 8ª Conferencia Internacional sobre Sistemas y Control, Marrakech, Marruecos por los especialistas Ali Rahat, Malik Fahad, Liaqat Muwahida y Shah Mustansar. Donde se describe un diseño de control de lazo cerrado para un dispositivo físico de bola y viga. El diseño de control permite seguir con eficacia una señal sinusoidal que cambia con el tiempo. Se utiliza un diseño de control cuadrático de retroalimentación de salida basado en una función de costo cuadrático bien definida basada en errores. Para estimar los estados del sistema se usa un filtro de Kalman que convierte la estructura no lineal en una forma canónica de Brunovsky. Los estados estimados del sistema se utilizan para regular el sistema práctico. Se valida el esquema de control de lazo cerrado propuesto con resultados prácticos que demuestran el seguimiento de señales de referencia sinusoidales que cambian con el tiempo en el sistema de bola y viga [62].

CAPÍTULO III

3 DESARROLLO

En este capítulo se da lugar a información técnica de los elementos y los métodos utilizados para la presente propuesta, dando a conocer el papel que estos componentes y herramientas juegan, además de la relevancia en el desarrollo del proyecto. También consta de la deducción matemática del sistema con el fin de expresar el modelo matemático, además se desarrolla el diseño tanto del control como del estimador y donde también se lleva a cabo la identificación de la planta.

3.1 COMPONENTES DE LA PROPUESTA

En el proceso de concepción y desarrollo del sistema balancín, se estableció el siguiente diagrama de componentes integral que engloba una variedad de elementos técnicos cruciales. Integra de manera sinérgica el microcontrolador, desempeñando este un papel fundamental en el sistema, además de los sensores especializados. Asimismo, como está en la figura 14, integra la comunicación mediante Bluetooth, proporcionando un enlace inalámbrico fundamental para su interacción remota, también los motores, dotados de encoders, además de una computadora.

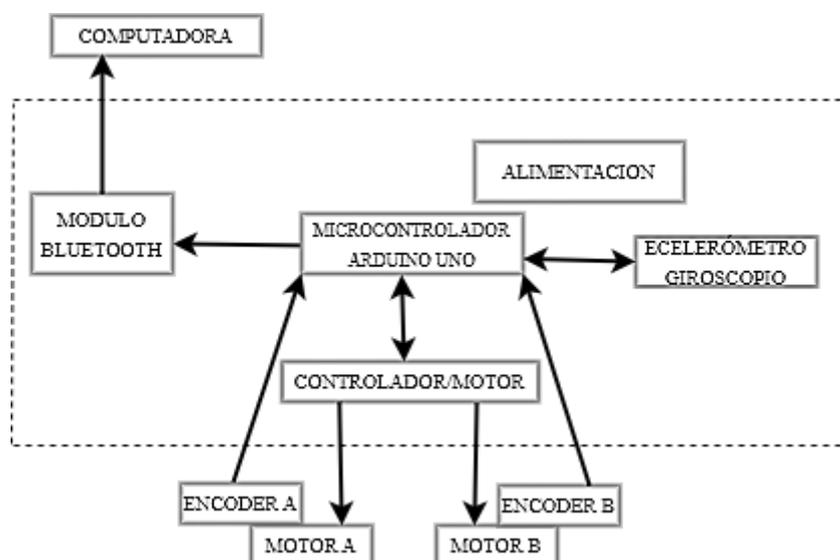


Figura 14. Diagrama de comunicación que ilustra la disposición de los elementos.

3.1.1 Elementos físicos (Hardware)

Los componentes de hardware desempeñan roles fundamentales en el funcionamiento del robot balancín, desde los motores y sensores hasta los controladores y la estructura mecánica. En esta descripción introductoria, exploraremos los elementos clave que constituyen la base física de este sistema propuesto.

3.1.1.1 Sensores y controladores

Los sensores actúan como los sentidos del sistema, recopilando datos del entorno o del sistema mismo, mientras que los controladores utilizan esta información para regular y mantener el comportamiento deseado. Esta sección explorará la interrelación entre estos componentes esenciales en el contexto de sistemas dinámicos y automáticos.

➤ Giroscopio-Acelerómetro MPU6050

Se incluyó el MPU 6050 el cual integra un giroscopio y un acelerómetro de triple eje MEMs. Estos sensores de velocidad angular (giroscopio) en ejes X, Y y Z presentan un rango de escala completa configurable por el usuario de ± 250 , ± 500 , ± 1000 y $\pm 2000^\circ/\text{seg}$. Este dispositivo incluye convertidores analógicos-digitales (ADC) de 16 bits que facilita el muestre simultáneo de datos del giroscopio. Con una corriente de operación de 3.6mA y una corriente de espera de $5\mu\text{A}$, el módulo de giroscopio encuentra un equilibrio óptimo entre funcionalidad y consumo de energía.

Las interfaces de comunicación abarcan el modo I2C a 400kHz para un acceso completo a los registros y una interfaz serial SPI a 1MHz para el intercambio de información con todos los registros (limitado a la variante MPU-6000). Además, la versión proporciona una interfaz serial SPI de alta velocidad a 20MHz para la lectura de registros de sensores y señales de interrupción, adaptándose a diversas necesidades de comunicación.

A continuación, se la ilustración correspondiente (figura 15) al módulo MPU 6050



Figura 15. Representación real del dispositivo MPU6050 [63].

➤ Encoder

El “Double Hall Switch 26 Pulse Output” es un tipo de encoder magnético utilizado para calcular con precisión la velocidad y al ángulo de rotación de un objeto en movimiento [64]. Este dispositivo emplea sensores basados en el efecto Hall, que son componentes electrónicos capaces de detectar campos magnéticos, para llevar a cabo estas mediciones de manera exacta. A medida que el objeto en movimiento realiza

giros, los sensores de efecto Hall perciben las señales magnéticas generadas por marcas magnéticas en el objeto, generando señales eléctricas correspondientes. Posteriormente, estas señales se envían al microcontrolador para su análisis y procesamiento [65].

En la figura 16 se muestra los encoder que vienen integrados en el sistema de control de motores para el seguimiento preciso del movimiento, el cual es esencial para garantizar el funcionamiento eficiente y seguro de los sistemas.

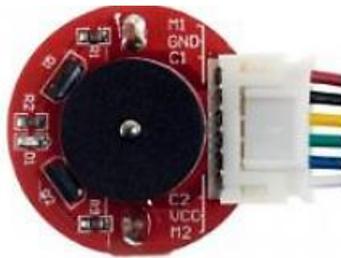


Figura 16. Sensor de motor, encoder de efecto Hall [65].

➤ **Driver IC TBB6612FNG para motor DC**

Este IC emplea transistores de salida en una estructura de fuente de óxido metálico (MOS) de baja resistencia ON, lo que contribuye a su rendimiento óptimo. A través de la manipulación de dos señales de entrada, IN1 e IN2, el TB6612FNG (ver figura 17) permite la selección de entre cuatro modos operativos distintos: sentido de giro en el con respecto al guiro de las agujas del reloj (CW), sentido de giro contrario al guiro de las agujas del reloj (CCW), frenado corto y modo de parada. Entre sus características clave, se incluye la capacidad de operar con un voltaje de alimentación mínimo de 5V [63]. Para optimizar la eficiencia energética, incorpora un sistema de espera que reduce el consumo de energía durante periodos de inactividad.

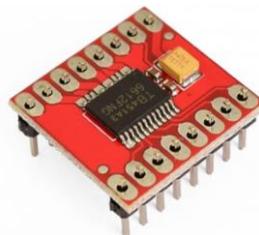


Figura 17. Representación real del driver TB6612FENG [63].

➤ **Actuadores**

Estos dispositivos son responsables de ejecutar movimientos, cambios en el entorno o ajustes necesarios en respuesta a las instrucciones proporcionadas por el

sistema de control, aquí se procede a explorar sus características que lo hace fundamental para el sistema dinámicos y automático.

➤ **Motor DC GA37-520**

En cuanto a su seguridad y funcionamiento, el dispositivo de la figura 18 presenta una resistencia de aislamiento de al menos $10M\Omega$ a 100v Dc entre sus terminales y la carcasa metálica, lo que garantiza un nivel adecuado de aislamiento eléctrico. El torque de bloqueo, un indicador esencial de la capacidad de un motor para superar cargas estáticas se cifra en al menos 5.5 kg-cm al voltaje nominal. Para su almacenamiento, el motor puede tolerar temperaturas en el rango de -20°C a $+85^{\circ}\text{C}$. Este componente se erige como una entidad esencial en el contexto de sistemas electrónicos, de control, adaptabilidad a condiciones cambiantes y rendimiento consistente.



Figura 18. Diagrama de pines del motor GA37-520 [63].

• **Microcontrolador**

Se seleccionó el microcontrolador Arduino Uno para esta propuesta, el cual destaca por su robusta arquitectura y capacidades que le proporcionan versatilidad. Operando a una frecuencia máxima de 16 MHz, el Arduino Uno está basado en el microcontrolador ATmega328P. La capacidad de memoria flash integrada de 32KB en esta placa posibilita el almacenamiento de programas y datos esenciales para la ejecución de tareas. El proceso de desarrollo y programación del microcontrolador se realiza mediante el entorno de desarrollo Arduino IDE, en conjunto con el compilador diseñado para arquitecturas de 8 bits. La programación del microcontrolador se simplifica mediante la conexión directa USB al puerto de programación del Arduino Uno [66].

3.1.2 Componentes lógicos (Software)

Estos componentes, como algoritmos, programas y protocolos de comunicación son esenciales para dirigir las operaciones del hardware y garantizar un rendimiento

coherente. En esta sección, se exploran estos componentes en la configuración y operación eficiente de sistemas electrónicos.

- **Simulador Numérico**

Esta herramienta de simulación numérica permite la programación y simulación que proporciona un entorno de desarrollo integrado, cuyos elementos simplifican la caracterización del sistema, generando el espacio de estados que describe el desempeño del sistema sujeto a control. Su enfoque se centra en la resolución de problemas complejos mediante métodos numéricos y algoritmos avanzados [57]. Esta plataforma brinda una interfaz de usuario altamente adaptable y un ambiente de desarrollo que fusiona un conjunto integral de herramientas de análisis con un lenguaje de programación de alto nivel que permiten la correcta ejecución del algoritmo desarrollado para el control del sistema péndulo invertido.

- **Arduino IDE**

Arduino IDE es una plataforma de desarrollo integral creada para programar y diseñar aplicaciones en placas Arduino, que son microcontroladores esenciales en proyectos electrónicos y sistemas de control. En el marco del desarrollo de control para el sistema balancín, Arduino IDE emerge como una herramienta esencial, permitiendo la programación del microcontrolador incorporado en la placa Arduino mediante la codificación en lenguaje estructurado como C/C++. Esto posibilita la configuración de pines, la lectura de sensores como acelerómetros o giroscopios, y la implementación de algoritmo de control, como controladores lineales cuadráticos, para regular las acciones del motor y mantener el equilibrio del sistema balancín de manera precisa y adaptable. En síntesis, Arduino IDE simplifica el proceso de desarrollar, cargar y optimizar el código en las placas Arduino, otorgando una plataforma esencial para implementar efectivamente algoritmos de control en sistemas complejos como el balancín.

- **Soporte Arduino-Simulink**

Esta librería para el software numérico establece un vínculo técnico esencial entre las placas Arduino y la plataforma de simulación Simulink. Actuando como interfaz, esta herramienta simplifica la modelización en bloques de fenómenos físicos y procesos, permitiendo una programación eficaz. En el contexto del sistema balancín, esta funcionalidad se traduce en la capacidad de diseñar, simular y ajustar algoritmos de control en un entorno virtual, aprovechando las capacidades de Simulink para analizar y optimizar el desempeño del sistema antes de implementarlo en la realidad. Este enfoque promueve la creación de sistemas de control altamente eficientes y precisos al

posibilitar una validación rigurosa en simulación antes de su aplicación en el sistema físico.

3.1.3 Diagrama de Conexión de los elementos electrónicos

A continuación, se presenta el diagrama de conexión desarrollado que se aprecia en la figura 19 de los elementos que intervienen en el sistema del robot balancín, como se da uso de una tarjeta Arduino Uno R3 como el microcontrolador del sistema electrónico balancín se da provecho de la salida de 5V que este nos proporciona, para la cual se alimenta los sensores y los controladores de los motores. Por otra parte, esta tarjeta de desarrollo Arduino también cuenta con 2 pines de comunicación I2C para el sensor de MPU, lo que nos permite obtener los datos de inclinación que nos genera este sensor, información importante para la obtener el correcto control de la planta.

El módulo Bluetooth tiene los pies de comunicación Tx y Rx, los que, conectados al microcontrolador R3, se transmite los datos a la PC para monitorear los datos del robot, para realizar aquello se usa el protocolo de comunicación serial entre estos dispositivos. En el diagrama de la figura 19 se inicia la conexión de los componentes que conforman el sistema balancín, además, el sistema de control emplea la información que estos circuitos electrónicos nos proporcionan, por lo que es de esperar cierto nivel de ruido interno a parte de las perturbaciones que este experimente.

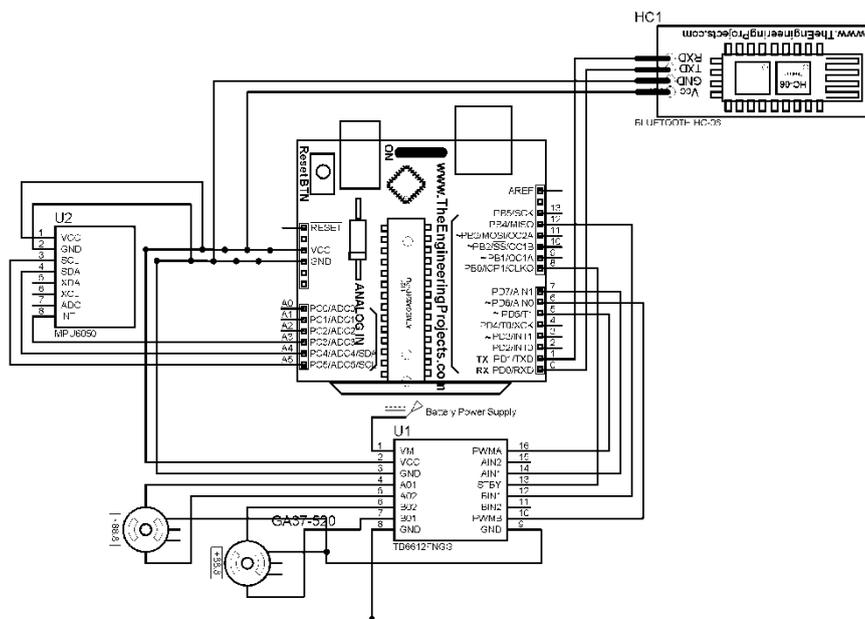


Figura 19. Diagrama de conexión de los componentes electrónicos

3.2 DISEÑO DE LA PROPUESTA

En esta sección, se aborda de manera exhaustiva y detallada la propuesta de control para el sistema balancín. Se lleva a cabo un enfoque analítico y experimental que abarca desde la formulación del modelo matemático hasta la linealización, identificación precisa de la planta y el diseño estratégico de las técnicas de control. Cada etapa se explora minuciosamente, combinando análisis teóricos con pruebas experimentales para lograr una implementación precisa y efectiva del sistema de control.

3.2.1 Sistema de péndulo invertido (Robot balancín)

El sistema de péndulo invertido, el cual cuenta con un cuerpo vertical suspendido que equilibra un objeto en su extremo superior. El péndulo puede oscilar en el plano vertical y, al mismo tiempo, las ruedas pueden provocar un movimiento horizontal a lo largo de la pista. Además, incluye los sensores que permiten conocer el estado actual y realizar ajustes en tiempo real, como también de actuadores los cuales controlan la posición y velocidad de la planta, así como aplicar torque al péndulo para mantenerlo en equilibrio.

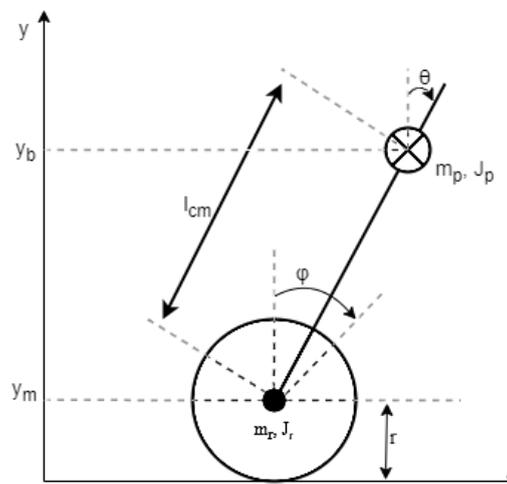


Figura 20. Diagrama del sistema de péndulo invertido

La figura 20 presenta el sistema de péndulo invertido, las variables a controlar que incluyen el ángulo de inclinación y la velocidad angular del péndulo, así como la posición y velocidad de las ruedas en la pista. La posición de estas se manipula mediante actuadores para contrarrestar los cambios en el péndulo. Las fuerzas externas actúan como variables de proceso, mientras que las acciones de control, como el movimiento de la base de dos ruedas y el torque aplicado al péndulo, representan la

variable de salida. El objetivo principal radica en mantener el péndulo en posición vertical y lograr un equilibrio estable, lo que implica una interacción compleja entre las variables controladas y manipuladas.

En la siguiente Tabla 2 se muestra a continuación las constantes de este sistema y las variables de este:

Tabla 2. Variables y constantes paramétricas de la planta balancín.

Representación	Valor	Descripción	Unidades
Variabes			
x	.	Posición del carro	m
\dot{x}	.	Velocidad del carro	m/s
θ	.	Inclinación del péndulo.	Rad
$\dot{\theta}$.	Velocidad de inclinación del péndulo.	rad/s
Constantes			
m_r	0,0907184	Masa de la rueda	Kg
m_p	0,7529634	Masa del péndulo	Kg
J_r	$\frac{1}{2}(m_r \cdot r^2)$	Momento de inercia de la rueda	kg·m ²
J_p	$\frac{1}{3}(m_p \cdot l^2)$	Momento de inercia del péndulo.	kg·m ²
r	0,034	Radio de la rueda	M
l_{cm}	0,126	Distancia del eje de la rueda al centro de más del péndulo	M
kt	0,015	Constante de torque	Nm
n	1/30	Relación de engranaje	
g	9,81	Gravedad	m/s ²
u_e	0,08	Constante de fuerza viscosa del eje	Ns/m ²
u_s	0,011	Constante fricción con el suelo	
ke	0,0333	Constante de fuerza contraelectromotriz.	V/rpm
R	0,0006	Resistencia del motor	Ohm
V	12	Tensión aplicada	V
k_s	12/65536	Constante de relación entre acción de control y tensión aplicada.	.

El sistema de péndulo invertido implica controlar variables como el ángulo de inclinación, la velocidad angular del péndulo y la posición de las ruedas en la pista. Se ajustan ruedas para contrarrestar los cambios en el péndulo, con el objetivo de mantenerlo vertical y lograr un equilibrio estable. La tabla enumera las constantes y variables clave del sistema, como masas, momentos de inercia y otras propiedades relacionadas con las ruedas, el péndulo y las fuerzas en juego.

3.2.2 Modelo matemático del sistema robótico

En esta sección del capítulo, se realiza un profundo análisis para determinar las ecuaciones dinámicas del sistema propuesto. Se abordan en detalle los enfoques del lagrangiana y el Euler-Lagrange para modelar la dinámica del sistema, empleando variables de estado para representar de manera precisa sus estados y comportamiento. Además, se explora la aplicación de principios físicos fundamental que subyacente en el funcionamiento del robot péndulo invertido, como la conservación de la energía y las leyes del movimiento, así como se considera el circuito eléctrico del motor DC que impulsa el sistema.

3.2.2.1 Ecuaciones dinámicas del sistema robot balancín (péndulo invertido)

Las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido de dos ruedas se pueden obtener mediante el método de Lagrange, basado en el sistema de coordenadas representado en la figura 3.7. Si, en $t=0$, la dirección del péndulo invertido de dos ruedas es positiva en el eje-x, cada coordenada (3.1, 3.2 y 3.3) viene dada por los siguientes términos:

$$(x, y) = (x_m, y_m) = \left(\int \dot{x}_m dt, r \right), (\dot{x}_m, \dot{y}_m) = (r\dot{\theta}, r) \quad (3.1)$$

$$(x_r, y_r) = (x_m, y_m) \quad (3.2)$$

$$(x_p, y_p) = (x_m + L\sin\theta, y_m + L\cos\theta) \quad (3.3)$$

Donde se obtuvieron las siguientes ecuaciones de energía cinética traslacional T_1 , energía cinética rotacional T_2 y energía potencial U :

$$T_1 = \frac{1}{2} m_r \cdot ((\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2)) + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) \quad (3.4)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} J_p \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{r^2} \cdot \dot{x}_r^2 \quad (3.5)$$

$$U = m_p g y_b \quad (3.6)$$

De aquí se analizaron la energía cinética de las ruedas (primer término de la ecuación 3.3), donde el subíndice r hace alusión a las ruedas que mueven al sistema linealmente, el segundo termino de esta misma ecuación es donde se analizó la energía cinética en el péndulo-chasis del sistema. El quinto y sexto término de la ecuación 3.5

son la energía cinética rotacional en la armadura del motor DC tanto izquierdo como el derecho.

A partir de estas ecuaciones obtenidas, se procede a determinar la siguiente expresión de L Lagrangiana:

$$L_t = T_1 + T_2 - U \quad (3.7)$$

$$L_t = \frac{1}{2} m_r \cdot ((\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2)) + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + \frac{1}{2} J_p \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{r^2} \cdot \dot{x}_r^2 - m_p g(r + l \cos \theta) \quad (3.8)$$

Para el desarrollo de esta expresión matemática (3.8) se emplea las coordenadas generalizadas que describen este modelo. Estas coordenadas son la inclinación del péndulo sobre la vertical, denotada por θ , y el ángulo de la rueda, representado como φ . A través de φ , es posible obtener la distancia x . L_{cm} es la distancia desde el centro de gravedad del péndulo hasta el eje de giro, mientras que J_p y J_r son los momentos de inercia del péndulo y la rueda, respectivamente. Además, m_p y m_r son las masas del péndulo y la rueda respectivamente.

3.2.2.2 Ecuación de Lagrange

A partir de la ecuación de Lagrange 3.9:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum Q_i \quad (3.9)$$

Se tienen las siguientes expresiones:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta \quad (3.11)$$

Donde se realiza las respectivas derivadas parciales, tanto para x (ecuación 3.10) como para θ (ecuación 3.11). Después de aplicar las condiciones mencionadas al Lagrange en cuestión, se derivan las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\left(m_r + m_p + \frac{J_r}{r^2} \right) \ddot{x} + m_p \ddot{\theta} l \cos \theta = F_x \quad (3.12)$$

$$m_p \ddot{x} l \cos \theta + (m_p l^2 + J_p) \ddot{\theta} + m_p g l \sin \theta - (m_p l \dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) = F_\theta \quad (3.13)$$

Obteniendo así las expresiones que modelan el péndulo invertido donde se les aplico una fuerza F externa a este proceso.

3.2.2.3 Fuerzas generalizadas y dinámica del motor de corriente continua

En consideración de el torque del motor, la fricción viscosa y la fuerza de fricción con el suelo, las fuerzas generalizadas son las que se ven a continuación:

$$F_{\theta} = -\tau_{mi,d} + u_e(\dot{\theta} - \dot{\phi}_{i,d}) \quad (3.14)$$

$$F_{x_{i,d}} = \frac{\tau_{mi,d}}{r} - u_s \dot{x}_{i,d} - \frac{u_e}{r}(\dot{\phi}_{i,d} - \dot{\theta}) \quad (3.15)$$

Donde $\tau_{mi,d} = nk_t i_{i,d}$ de las ecuaciones 3.14 y 3.13 es el troque del motor DC izquierdo y derecho. En este contexto no se puede usar la corriente del motor DC directamente con el fin de controlarlo porque el motor se basa en el control (voltaje) PWM. Por lo tanto, se evalúa la relación entre la corriente y el voltaje usando la ecuación del motor DC (Ver figura 19). Si la fricción dentro del motor es despreciable, la ecuación de un motor DC es generalmente como sigue:

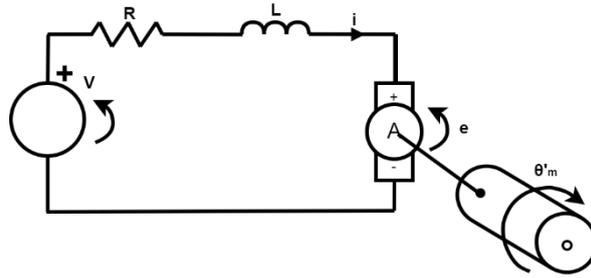


Figura 21. Diagrama del sistema de péndulo invertido [18].

$$L_m \dot{i}_{i,d} = v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right) - R i_{i,d} \quad (3.16)$$

Se considera que la inductancia del motor es despreciable y es aproximadamente cero, por lo tanto, se tiene:

$$i_{i,d} = \frac{v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)}{R} \quad (3.17)$$

De la ecuación de torque despeja $i_{i,d} = \frac{\tau_m(t)}{nk_t}$, se procede a igualar con 3.17, así:

$$\frac{\tau_m(t)}{nk_t} = \frac{v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)}{R} \quad \tau_m(t) = \frac{nk_t}{R} k_s u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right) \quad (3.18)$$

Reemplazando 3.17 en 3.14 y 3.15 se tiene las siguientes expresiones de fuerzas generalizadas:

$$F_{x_r} = \frac{nk_t}{R} k_s u + \left(\frac{nk_t K_e}{Rr} + \frac{u_e}{r} \right) \dot{\theta} - \dot{x} \left(\frac{nk_t K_e}{Rr^2} + \frac{u_e}{r^2} + u_s \right) \quad (3.19)$$

$$F_{\theta} = -\frac{nk_t}{R} k_s u - \dot{\theta} \left(\frac{nk_t K_e}{R} + u_e \right) + \dot{x} \left(\frac{nk_t K_e}{Rr} + \frac{u_e}{r} \right) \quad (3.20)$$

Si agregamos las expresiones 3.18, 3.19 al sistema visto en 3.13 y 3.12 reemplazándolas respectivamente, la siguiente notación es usada para las fórmulas resultantes:

$$I = \left(m_r + m_p + \frac{J_r}{r^2} \right) \quad (3.21)$$

$$J = \left(m_p l^2 + J_p \right) \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{m_p l}{I}; k_1 = \frac{nk_t k_s}{IRr}; k_2 = \frac{nk_t K_e}{IRr^2} + \frac{u_e}{Ir^2} + \frac{u_s}{I}; k_3 = \frac{nk_t K_e}{IRr} + \frac{u_e}{Ir}; k_4 \\ &= \frac{nk_t k_s}{JR}; k_5 = \frac{nk_t K_e}{rRr} + \frac{u_e}{Jr}; k_6 = \frac{nk_e k_t}{Rr} + \frac{u_e}{J}; k_7 \\ &= \frac{m_p l}{J}; k_8 = \frac{m_p g l}{J} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por lo tanto, las igualdades que modelan el movimiento del péndulo invertido, junto con el desplazamiento del móvil desde un punto fijo (medido desde el origen en el plano horizontal), se expresan como sigue:

$$\ddot{x} + k_0 \ddot{\theta} \cos \theta = k_1 u - k_2 \dot{x} + k_3 \dot{\theta} \quad (3.24)$$

$$\ddot{\theta} + k_7 \ddot{x} \cos \theta = -k_8 \sin \theta + k_7 (\dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) - k_4 u + k_5 \dot{x} - k_6 \dot{\theta} \quad (3.25)$$

En este contexto, se definen como variables de estado el desplazamiento horizontal de las ruedas (x) y su velocidad \dot{x} , además del desplazamiento angular del péndulo (θ) y su velocidad angular correspondiente ($\dot{\theta}$). Por otro lado, las variables de entrada ($v_i + v_d$) representan el voltaje que se aplican al sistema para desplazar hacia

atrás y hacia adelante con el fin de controlarlo. Las ecuaciones diferenciales de segundo orden (3.22-23) pueden expresarse con respecto a las derivadas de mayor orden de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k_0 \cos \theta \\ k_7 \cos \theta & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} k_1 u - k_2 \dot{x} + k_3 \dot{\theta} \\ -k_8 \sin \theta + k_7 (\dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) - k_4 u + k_5 \dot{x} - k_6 \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

Es decir.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Delta} [\Delta_1 - k_0 (\cos \theta) \Delta_2] \\ \frac{1}{\Delta} [\Delta_2 - k_7 (\cos \theta) \Delta_1] \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Donde: $\Delta_1 = k_1 u - k_2 \dot{x} + k_3 \dot{\theta}$, $\Delta_2 = -k_8 \sin \theta + k_7 (\dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) - k_4 u + k_5 \dot{x} - k_6 \dot{\theta}$, $\Delta = 1 - k_0 k_7 (\cos(\theta))^2$. Y tomando las variables de estado como $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, las ecuaciones 3.25 pueden ser transformadas en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_1 - k_0 (\cos \theta) \Delta_2] \\ &= \frac{k_1 u - k_2 \dot{x} + k_3 \dot{\theta} - k_0 (\cos \theta) (-k_8 \sin \theta + k_7 (\dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) - k_4 u + k_5 \dot{x} - k_6 \dot{\theta})}{1 - k_0 k_7 (\cos(\theta))^2} \\ \dot{x}_3 &= x_4 \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{1}{\Delta} [\Delta_2 - k_7 (\cos \theta) \Delta_1] \\ &= \frac{-k_8 \sin \theta + k_7 (\dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) - k_4 u + k_5 \dot{x} - k_6 \dot{\theta} - k_7 (\cos \theta) (k_1 u - k_2 \dot{x} + k_3 \dot{\theta})}{1 - k_0 k_7 (\cos(\theta))^2} \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones presentada (3.26), corresponde a las ecuaciones diferenciales que modelan el comportamiento del sistema de péndulo invertido del robot balancín, este modelado es una representación no lineal de este proceso por lo tanto es necesario aplicarle técnicas matemáticas y algebraicas para que cumpla ciertos requisitos básicos de superposición y homogeneidad.

3.2.2.4 Modelado lineal de la dinámica matemática del sistema mediante una representación en espacio de estados.

Para resolver las ecuaciones de movimiento, se requiere linealizarlas mediante la identificación de puntos de equilibrio en el sistema. Estos puntos de equilibrio

buscan que el péndulo se mantenga en una posición vertical, lo que a su vez facilita la representación lineal del sistema en un pequeño rango de movimiento cercano a dicha posición.

En este contexto, si se considera los siguientes puntos de equilibrio en 3.29:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= 0 \\x_3 &= 0 \\x_4 &= 0\end{aligned}\tag{3.29}$$

Como paso previo a la linealización se procede a obtener las siguientes expresiones a partir del jacobiano con respecto a las cuatro variables de estados mencionadas en 3.30:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & J(2,2) & J(2,3) & J(2,4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & J(4,2) & J(4,3) & J(4,4) \end{bmatrix}\tag{3.30}$$

$$J(2,2) = -\frac{k_5 \cdot k_0 \cdot \cos(x_3) + k_2}{(1 - k_7 \cdot k_0 \cdot \cos^2(x_3))}\tag{3.31}$$

$$J(2,3) =$$

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{k_0(k_6 \sin(x_3) - k_k + 2k_8 \cos(x_3)^2 + k_4 u \sin(x_3) - k_5 u \sin(x_3) + k_3 k_7 \sin 2(x_3) + k_0 k_7 k_6 (\sin(x_3) - \sin(x_3)^3))}{(k_0 k_7 \cos(x_3)^2 - 1)^2} \right. \\ & + \frac{-k_0 k_7 k_8 \cos(x_3)^2 + k_1 k_7 u \sin 2(x_3) - k_2 k_7 u \sin 2(x_3) + k_0 k_7 k_4 u (\sin(x_3) - \sin(x_3)^3)}{(k_0 k_7 \cos(x_3)^2 - 1)^2} \\ & \left. + \frac{-k_0 k_7 k_5 u (\sin(x_3) - \sin(x_3)^3)}{(k_0 k_7 \cos(x_3)^2 - 1)^2} \right)\end{aligned}\tag{3.32}$$

$$J(2,4) = \frac{k_6 \cdot k_0 \cos(x_3) + k_3}{(1 - k_7 \cdot k_0 \cdot \cos^2(x_3))}\tag{3.33}$$

$$J(4,2) = \frac{(k_2 k_7 \cos(x_3) + k_5)}{1 - k_0 k_7 (\cos(x_3))^2}\tag{3.34}$$

$$\begin{aligned} J(4,3) &= \frac{(k_2 k_7 \cdot x_2 \cdot \sin(x_3))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)} - \frac{(k_1 k_7 \cdot u \cdot \sin(x_3))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)} - \frac{(k_8 \cdot \cos(x_3))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)} - \\ & \frac{(k_3 k_7 \cdot x_4 \cdot \sin(x_3))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)} - \frac{(2 \cdot k_0 k_7 k_8 \cdot \cos(x_3) \cdot \sin(x_3)^2)}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)^2} + \\ & \frac{(2 \cdot k_0 k_7 \cdot u \cdot \cos(x_3) \cdot \sin(x_3) \cdot (k_4 + k_1 k_7 \cdot \cos(x_3)))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)^2} - \frac{(2 \cdot k_0 k_8 \cdot x_2 \cdot \cos(x_3) \cdot \sin(x_3) \cdot (k_5 + k_2 k_7 \cdot \cos(x_3)))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)^2} + \\ & \frac{(2 \cdot k_0 k_7 \cdot x_4 \cdot \cos(x_3) \cdot \sin(x_3) \cdot (k_6 + k_3 k_7 \cdot \cos(x_3)))}{(k_0 k_7 \cdot \cos(x_3)^2 - 1)^2}\end{aligned}\tag{3.35}$$

$$J(4,4) = \frac{k_3 k_7 \cos(x_3) + k_6}{(1 - k_0 k_7 \cdot \cos^2(x_3))}\tag{3.36}$$

Primero, igualamos las derivadas de las variables (ecuaciones 3.31-3.36) a cero para encontrar los puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio son aquellos en los que el ángulo de inclinación $\theta=0$ con respecto al eje y positivo, donde las derivadas de las variables de estado son 0. Dado que el punto $\theta=0$ desde la vertical es un equilibrio inestable, linealizamos el jacobiano (3.31-3.36) alrededor de ese punto. Luego, sustituimos los puntos de equilibrio en el jacobiano para obtener una representación del sistema en el espacio de estados.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}\tag{3.37}$$

Donde $x = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]^T$, $u = [v_1 \ v_d]^T$, $y = [x \ \theta]^T$, y las matrices A, B, C y D se definen de la siguiente forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{k_5 \cdot k_0 + k_2}{(k_7 \cdot k_0 - 1)} \right) & \frac{k_0 k_8}{(k_0 k_7 - 1)} & -\frac{k_3 + k_6 \cdot k_0}{(k_7 \cdot k_0 - 1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2 k_7 + k_5}{(k_0 k_7 - 1)} & -\frac{k_8}{(k_0 k_7 - 1)} & \left(\frac{k_3 k_7 + k_6}{(k_0 k_7 - 1)} \right) \end{bmatrix}\tag{3.38}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_4 \cdot k_0 + k_1}{(k_7 \cdot k_0 - 1)} \\ 0 \\ \frac{k_1 k_7 + k_4}{(k_0 k_7 - 1)} \end{bmatrix}\tag{3.39}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\tag{3.40}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{3.41}$$

Donde se obtuvo la matriz de estados 3.38, representándose en ella las cuatro variables de estados de nuestro sistema, también la matriz de entradas 3.39, cuya cantidad de columnas representan las entradas para el motor izquierdo y derecho respectivamente, además de la matriz de salidas 3.40 y de transmisión directa (3.41). En secciones posteriores se logrará identificar completamente el sistema para obtener un modelo más preciso con valores numéricos.

En la figura 22 se muestra que en la plataforma de programación y cálculo numérico se obtiene los respectivos espacios de estados reemplazando los parámetros y dimensiones de la plata, con lo cual se obtiene el siguiente modelo:

```

modelo_2 =

A =
      x1      x2      x3      x4
x1      0       1       0       0
x2      0  -74.98  -17.08   5.096
x3      0       0       0       1
x4      0   520.1   160.1  -35.35

B =
      u1
x1      0
x2  2.754e-06
x3      0
x4  -1.91e-05

C =
      x1  x2  x3  x4
y1      1   0   0   0
y2      0   0   1   0

D =
      u1
y1      0
y2      0

```

Figura 22. Modelo basado en los parámetros de sistema en espacio de estados

Posteriormente se lleva a cabo la discretización del modelo resultante, se emplea un tiempo de muestreo de $T=0.005s$ mediante el método de Tustin o conocida como la transformación Bilineal, en el programa de cálculo numérico mencionado donde se emplea la función “c2d” y obtenemos el siguiente resultado:

```

Modelo discreto en el espacio de estados

modelo_2d =

A =
      x1      x2      x3      x4
x1      1  0.004265 -0.0001623  4.955e-05
x2      0   0.706  -0.06492   0.01982
x3      0   0.0051   1.002   0.004657
x4      0   2.04    0.6584   0.863

B =
      u1
x1  2.7e-11
x2  1.08e-08
x3 -1.873e-10
x4 -7.493e-08

C =
      x1      x2      x3      x4
y1      1  0.002132 -8.115e-05  2.478e-05
y2      0   0.00255   1.001   0.002329

D =
      u1
y1  1.35e-11
y2 -9.367e-11

Sample time: 0.005 seconds
Discrete-time state-space model.

```

Figura 23. Modelo de espacio de estados discretizado

Ahora se revisa la inestabilidad del modelo del péndulo invertido para los posteriores procesos de control. Se parte de la expresión donde se haya el polinomio característico del sistema:

$$(sI - A) \quad (3.42)$$

Para poder hallar la estabilidad del sistema hay que tener los valores propios de la matriz A mediante la ecuación 3.42. Se toma en cuenta el sistema en tiempo continuo, dentro de la herramienta de cálculo, se emplea la función “eig” sobre la matriz A para determinar estos autovalores:

$$\det(sI - A) = a_1s^4 + a_2s^3 + a_3s^2 - a_4s \quad (3.43)$$

Cuyos valores propios son:

$$s = 0; s = -111.5178; s = -4.7285; s = 5.9117 \quad (3.44)$$

Como se puede apreciar las raíces en 3.44, la condición necesaria para que el sistema sea estable es que cada raíz de mi polinomio característico sea negativa, en nuestro caso hay un valor de s que es positivo, lo cual es suficiente para que el sistema sea inestable.

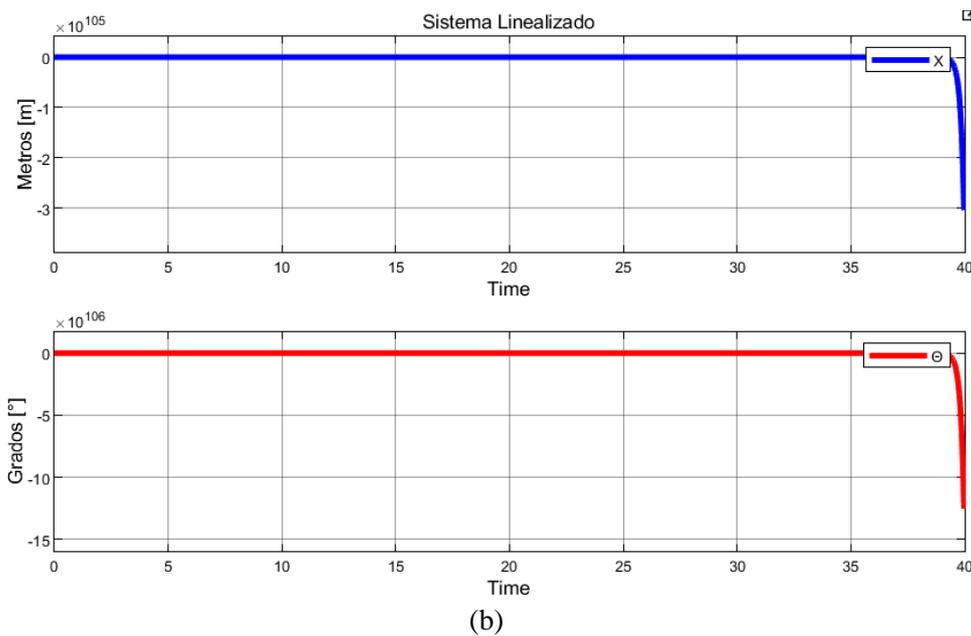
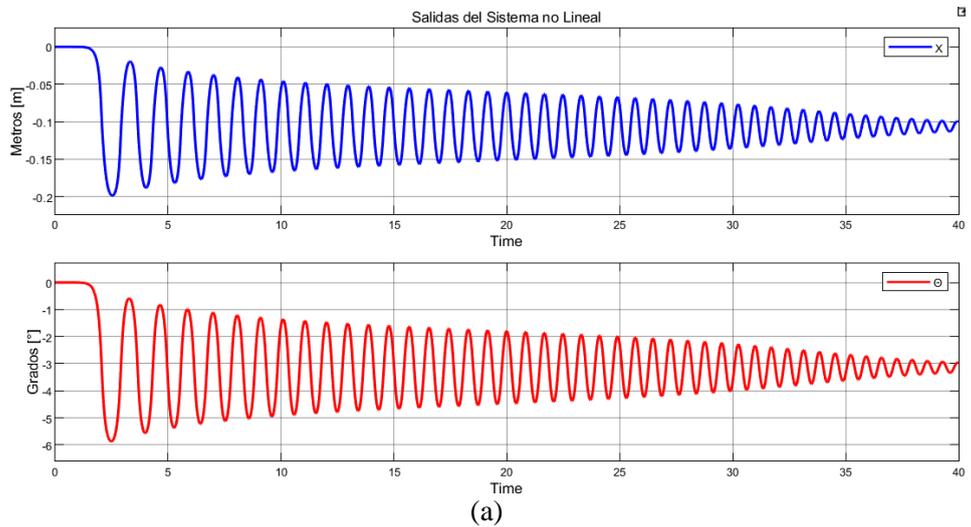


Figura 24. Respuesta ante la señal de impulso del sistema No lineal (a) y el linealizado (b)

De manera similar el sistema en tiempo discreto se llevó a cabo de forma análoga, se obtuvo el siguiente resultado como salida a la condición inicial:

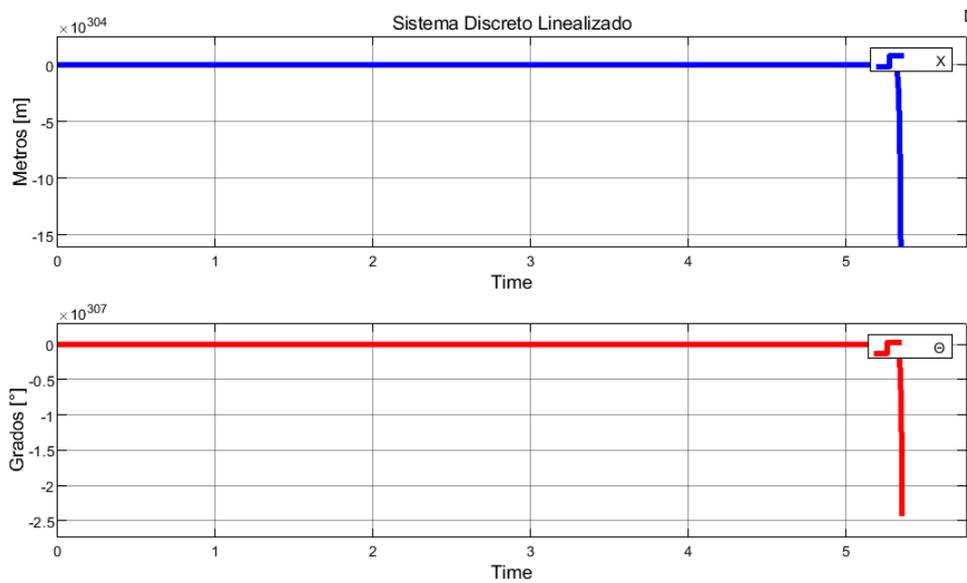


Figura 25. Respuesta al impulso del sistema discretizado.

Ahora se obtiene los valores propios de la matriz A discretizada:

$$\det(sI - A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5640 \\ 0.9766 \\ 1.03 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

En referencia a la figura 24(a), se evidencia un comportamiento inestable en el sistema no lineal en cuestión al ser sometido a la aplicación de un pulso unitario como entrada. En contraste, las figuras 24(b) revelan que, mediante una aproximación lineal, se logra mitigar considerablemente la desviación en la respuesta de salida, también con el resultado obtenido en los autovalores de modelo discretizado (3.45) se pueden confirmar que estos valores no convergen ya que presentan modulo mayor e igual que 1, lo cual resulta más congruente con los objetivos deseados y facilita la implementación de un control adecuado para dicho sistema.

3.2.3 Identificación del modelo matemático en espacio de estados del sistema robótico balancín

Antes de realizar el diseño del control y las respectivas simulaciones, es de mucha importancia tener las ecuaciones de comportamiento dinámico de la planta obtenidas basado en los datos de entrada y salida de la planta. Para poder representar el modelo del comportamiento del sistema, se procede a hacer uso del modelo en espacio de estados para obtener la expresión del diferencial de la planta en estudio, lo que permite obtener esta función es mediante la herramienta de el simulador numérico

denominada System Identification, la cual nos permite expresar la planta en un modelo determinado partiendo de los datos de entrada y salida.

3.2.3.1 Toma de datos e identificación de la planta mediante el simulador numérico

Luego de un análisis exhaustivo de la propiedades, limitaciones e interacciones físicas de cada componente que conforma el sistema, se procede a la recopilación de datos durante la ejecución del proceso en un estado de la planta sin intervención de control. En esta etapa, se introduce una apertura variable en el rango de velocidad del motor dc de -255 a 255 de PMW como entrada del sistema. Mientras tanto, se registra el ángulo de inclinación del péndulo θ (THETA), como la variable de salida fundamental que captura las dinámicas del proceso. Esta relación de apertura y la altura se representa gráficamente en la figura 26, permitiendo visualizar la respuesta del sistema en su configuración del código implementado para la lectura, analizando como el ángulo de inclinación del péndulo cambia con el tiempo a distintos valores angulares.



Figura 26. Diagrama del sistema robótico balancín en lazo abierto

Los valores son registrados a intervalos de 0.005 segundos, generando un conjunto de 551 muestras que son empleadas en el proceso de identificación del sistema. La figura 27 ilustra como se caracteriza el rendimiento de la salida medida basándose en estos datos recopilados.

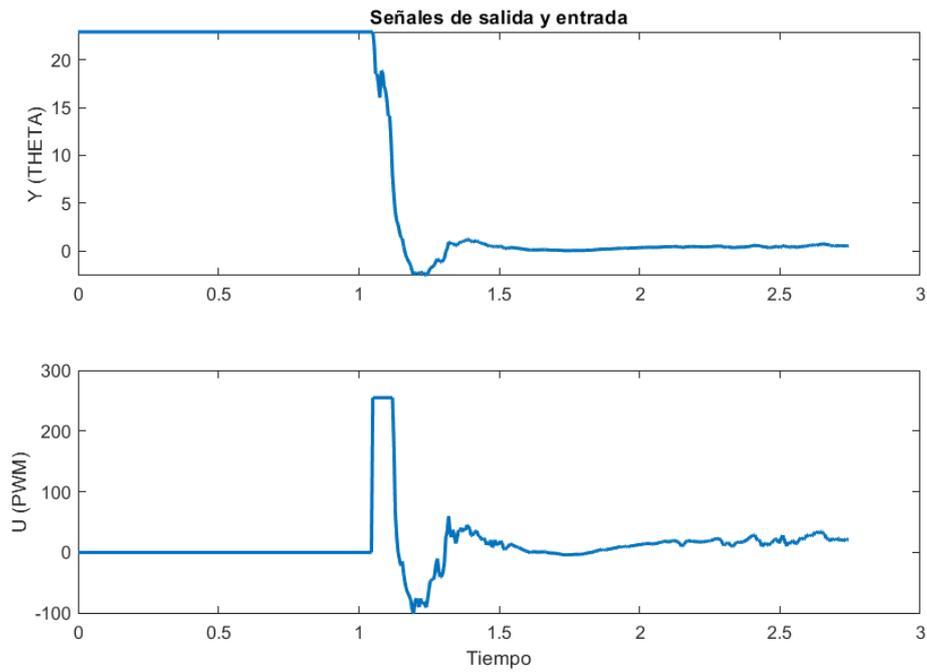


Figura 27. Diagrama del sistema robótico balancín en lazo abierto.

Tras la adquisición de los datos que interesan, se procede a emplear la funcionalidad “System Identification” provista por el entorno de software perteneciente al simulador numérico, con el propósito de determinar la formulación en términos de espacio de estados que encapsulan las características inherentes a la planta en cuestión.

Luego de la ejecución de una serie de experimentos que involucran diferentes aproximaciones del modelo en espacio de estado de la planta, se opta por seleccionar la señal que exhibe la respuesta más sobresaliente. Dicha señal será empleada en el desarrollo de los algoritmos de control pertinentes. En la figura 28 se presenta las señales empleadas en el proceso de estimación de modelo matemático.

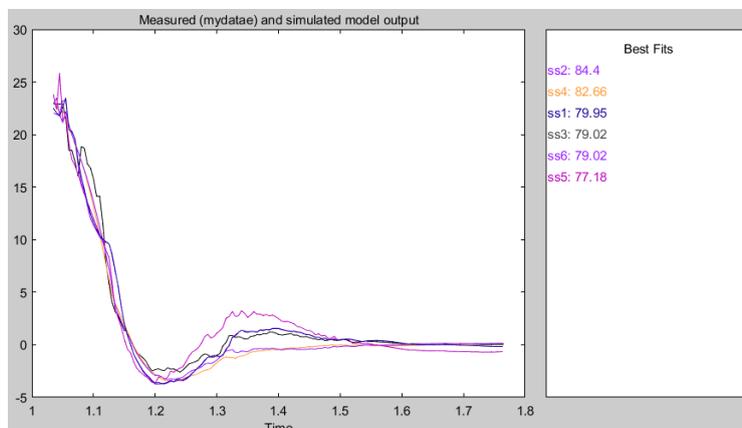


Figura 28. Comparación Señales de estimación de la planta balancín.

La Tabla 3 a continuación expondrá las aproximaciones obtenidas para la formulación en espacio de estados del sistema bajo estudio. Estas diversas perspectivas han sido desarrolladas en función de un análisis riguroso de las características y propiedades inherentes al sistema en cuestión. Se compara estas recopilaciones para identificar y seleccionar la formulación que mejor se ajuste a la representación matemática precisa del sistema, lo que, es fundamental para la aplicación de las teorías de control adecuadas, permitiendo un diseño y desarrollo óptimos de las estrategias de control que se ajusten a la dinámica y comportamiento del sistema real.

Tabla 3. Estimaciones de mayor correspondencia por modelo de estados.

Modelo	Estimación	Tipo	Estimación más adecuada
SS1	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo continuo	79,95%
SS2	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo continuo	84,4%
SS3	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo continuo	79,02%
SS4	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo discreto	82,86%
SS5	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo discreto	77,18 %
SS6	Modelo de espacio de estados	De 4 ^o orden, en tiempo discreto	79,02%

Conforme se puede apreciar en la Tabla 3, se exhiben seis expresiones del modelo matemático, generadas mediante procedimiento de estimación aplicados en contextos discretos y continuos. Adicionalmente, se ha considerado que tales formulaciones sean de orden cuádruple, en virtud de que esta formulación nos permite considerar la cantidad de estados que se analiza en para la planta que se está analizando, y también de que a partir de este orden se generan buenas respuestas de estimación para el sistema. De manera consecuente, se procede a optar por la formulación catalogada como “SS2”, la cual es una representación en el marco de espacio de estados que ha sido identificada en una modalidad de tiempo discreto y con un orden de 4. La evaluación cuantitativa de esta formulación arroja una aproximación de 84,4% en su concordancia con las características del sistema. Esta formulación es la seleccionada para su integración en el diseño del algoritmo del control Estimador Lineal Cuadrático (LQE).

Partiendo de la expresión del modelo de espacio de estados 3.37, se tiene la siguiente ecuación de la planta:

A=

	X1	X2	X3	X4
X1	-42,25	-26,02	-48,26	-29,29
X2	3,949	-10,08	-296,5	-144
X3	10,16	151,7	-166,9	-350,4
X4	16,15	194,44	288,6	0,4512

B=

U1 (PMW)

X1	0,8411
X2	2,909
X3	-1,172
X4	-3,8

C=

	X1	X2	X3	X4
Y (THETA)	5,099	-0,1556	0,1173	0,03161

D=

U (PWM)

Y (THETA)	0
------------------	---

El modelo de espacio de estado quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42,25 & -26,02 & -48,26 & -29,29 \\ 3,949 & -10,08 & -296,5 & -144 \\ 10,16 & 151,7 & -166,9 & -350,4 \\ 16,15 & 194,44 & 288,6 & 0,4512 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,8411 & 0,8411 \\ 2,909 & 2,9091 \\ -1,172 & -1,172 \\ -3,8 & -3,8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,099 & -0,1556 & 0,1173 & 0,03161 \\ 5,099 & -0,1556 & 0,1173 & 0,03161 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_i \\ v_d \end{bmatrix}$$

3.2.4 Diseño del sistema de control mediante bloques de simulación.

Lo siguiente a desarrollar en esta sección es el controlador mediante ubicación de polos al cual se le incorpora el filtro de Kalman como un estimador óptimo de estados, además, debe ser capaz de realizar un seguimiento de referencia, por lo que es necesario un servosistema. Previo al diseño de estas herramientas de control, se llevará a cabo una verificación preliminar de la controlabilidad y la observabilidad del sistema. Esta etapa es crucial y actúa como un paso necesario para garantizar que el sistema sea

adecuadamente manejable y observable antes de la implementación del controlador y del estimador de Kalman.

Este proceso implica evaluar las matrices de controlabilidad y observabilidad para asegurar que el sistema cumpla con los requisitos fundamentales para el diseño de controladores y estimadores efectivos.

Una vez confirmada la controlabilidad y observabilidad, se continua con el diseño del controlador mediante ubicación de polos y el estimador de Kalman, ajustando el tipo del sistema para satisfacer las referencias propuestas y seleccionando los polos deseados para el regulador. Luego, se procederá al diseño del filtro de Kalman, especificando las matrices de covarianza Q y R, lo que permitirá utilizarlo como un estimador óptimo de estados y un filtro para eliminar ruido en el sistema. Posteriormente, se integrarán de manera coherente el filtro de Kalman y el regulador mediante ubicación de polos para concluir el proceso de diseño del servocontrolador. Después de haber completado estas etapas, el sistema será sometido a diversas pruebas, como entradas de referencia, perturbaciones y señales estocásticas, con el objetivo de observar su comportamiento y rendimiento, y verificar que cumple con las especificaciones de diseño establecidas.

3.2.4.1 Verificación de la controlabilidad y observabilidad

Para comprobar la controlabilidad de la planta se procede en primer lugar a hallar la matriz de controlabilidad 3.47 con la siguiente formula:

$$\zeta = [B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (3.47)$$

Considerando que n es el número de estados, se tiene el siguiente resultado:

$$\zeta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,0003 & 0,0339 \\ 0 & -0,0003 & 0,0339 & -3,7749 \\ 0 & 0 & 0,0021 & -0,2356 \\ 0 & 0,0021 & -0,2356 & 26,2356 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, tambien se tiene, que para comprobar la observabilidad de un espacio de estados de orden 4, se usa la siguiente fórmula de la matriz de observabilidad:

$$v = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Donde n de la ecuación 3.48 también es el número de estados de nuestro sistema, se obtiene el siguiente resultado:

$$v = \begin{bmatrix} 0,0001 \times 10^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,001 \times 10^4 & 0 \\ 0 & 0,0001 \times 10^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0001 \times 10^4 \\ 0 & -0,0075 \times 10^4 & -0,0017 \times 10^4 & 0,0005 \times 10^4 \\ 0 & 0,0520 \times 10^4 & 0,0160 \times 10^4 & -0,0035 \times 10^4 \\ 0 & 0,8273 \times 10^4 & 0,02097 \times 10^4 & -0,0579 \times 10^4 \\ 0 & -5,7388 \times 10^4 & -1,4544 \times 10^4 & 0,4061 \times 10^4 \end{bmatrix}$$

Para el cálculo dentro del software de programación se emplean como variables “ctrb” y “obsv” usando las matrices de sistema continuo de espacio de estados de la planta, dando como resultado lo siguiente:

Matrices de controlabilidad y observabilidad:

```
>> P1=ctrb(modelo_2)

P1 =

      0    0.0000   -0.0003    0.0339
  0.0000   -0.0003    0.0339   -3.7749
      0   -0.0000    0.0021   -0.2356
 -0.0000    0.0021   -0.2356   26.2741

>> rank(P1)

ans =

      4
```

(a)

```

>> O=obsv(modelo_2)

O =

      1.0e+04 *
      0.0001      0      0      0
      0      0      0.0001      0
      0      0.0001      0      0
      0      0      0      0.0001
      0     -0.0075     -0.0017     0.0005
      0      0.0520      0.0160     -0.0035
      0      0.8273      0.2097     -0.0579
      0     -5.7388     -1.4544      0.4061

>> rank(O)

ans =

      4

```

(b)

Figura 29. Matrices de Controlabilidad (a) y Observabilidad (b) del sistema.

A partir de estas matrices obtenidas, se les verifica el rango de manera individual, en nuestro caso es 4 para las dos matrices. Para que se cumplan las propiedades de controlabilidad (ver figura 29.a) y observabilidad (ver figura 29.b) el rango de cada una de estas matrices debe ser igual al número de estados con el que se está trabajando, para nuestro caso de estudio se corrobora que es así, dando paso a la aplicación de las teorías de control robusto.

3.2.4.2 Diseño del servosistema tipo 1 o sistema aumentado

Con el propósito de diseñar el servosistema de control de tipo 1, nos basaremos en el contenido abordado en el marco conceptual, específicamente en la definición del capítulo anterior, donde se derivaron las ecuaciones 2.41 y 2.42 del sistema de control.

Si llevamos estas ecuaciones a las expresiones que estén en función de estado de error, se tiene las siguientes funciones:

$$\dot{e} = A_a e + B_a u_e$$

$$y = C_a e$$

Donde:

$$A_a = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad B_a = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C_a = [C \quad 0]$$

$$u_e = -K_a e \quad e = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$$

El vector de retroalimentación aumentado es:

$$K_a = [K \quad -k_1]$$

Las matrices A_a , B_a y C_a se denominarán matrices aumentadas. Con el fin de diseñar el sistema de control de seguimiento, se utilizará la posición del carro “ $x(t)$ ” como entrada de referencia para el seguimiento. En este enfoque, se controlará la posición del ángulo mediante la aplicación de la acción de control a la posición del carro. Para lograr esto, se realizará una modificación en la matriz de salida C del modelo matemático de la siguiente forma:

$$C_n = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

Por lo tanto, la matriz aumentada de C_a que de la siguiente forma:

$$C_a = [C_n \quad 0]$$

Donde se especifica que, para su diseño, el servosistema de control se creará sobre la posición del carro $x(t)$. Dentro del programa de cálculo numérico se procede a implementar lo anterior, con lo cual se obtiene la figura 30:

```

Aa =
    0    1.0000    0    0    0
    0 -74.9797 -17.0818  5.0963  0
    0     0     0     0  1.0000  0
    0 520.1272 160.0700 -35.3549  0
 -1.0000    0     0     0     0

Ba =
1.0e-04 *
    0
    0.0275
    0
 -0.1910
    0

Ca =
    1    0    0    0    0

Da =
    0

```

Figura 30. Matrices de espacios de estados aumentados

Por consiguiente, se procede a establecer el modelo de espacios de estado aumentado, en el software que se emplea para dicho propósito, a continuación, se muestra el resultado:

```
>> sys_a=ss(Aa,Ba,Ca,Da)

sys_a =

A =
      x1      x2      x3      x4      x5
x1      0       1       0       0       0
x2      0    -74.98   -17.08    5.096    0
x3      0       0       0       1       0
x4      0    520.1    160.1   -35.35    0
x5     -1       0       0       0       0

B =
      u1
x1      0
x2    2.754e-06
x3      0
x4   -1.91e-05
x5      0

C =
      x1  x2  x3  x4  x5
y1     1  0  0  0  0

D =
      u1
y1     0

Continuous-time state-space model.
```

Figura 31. Modelo de espacios de estados aumentados.

Por último, se corrobora la respectiva controlabilidad de este nuevo sistema aumento como paso previo al diseño del vector de retroalimentación por ubicación de polos, comprobación que está definida por:

$$P2 = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ -C_a & 0 \end{bmatrix}$$

Si la dimensión del espacio columna generado por la matriz P2 es “n+1”, donde “n” es el número de variables de estado, entonces se concluye que el sistema aumentado es completamente controlable en término de estados. Esta característica asegura que sea posible y viable diseñar un controlador para dicho sistema aumentado.

En el software de cálculo numérico se tiene lo siguiente:

```

>> P2=[Aa Ba;-Ca 0]
rangP=rank(P2)

P2 =

    0    1.0000    0    0    0    0
    0   -74.9797   -17.0818    5.0963    0    0.0000
    0    0    0    1.0000    0    0
    0  520.1272  160.0700   -35.3549    0   -0.0000
   -1.0000    0    0    0    0    0
   -1.0000    0    0    0    0    0

rangP =

    5

```

Figura 32. Matriz P2 del sistema aumentado

Como se aprecia en la figura 32, la dimensión del espacio columna generado por la matriz P es 5, satisfaciendo así la condición previamente mencionada. En consecuencia, se concluye que el sistema aumentado o de seguimiento es completamente controlable en términos de estados. Esto significa que es factible y posible diseñar un controlador para este sistema aumentado.

➤ **Diseño del servo-control por realimentación de estados mediante ubicación de polos.**

A continuación, se procede al diseño del sistema de control para la simulación de la planta balancín mediante la aplicación del algoritmo matemático para la determinación de las ganancias de control por ubicación de polos. Este proceso se basa en la consideración del servosistema desarrollado previamente en la sección anterior, como se ilustra en la figura 29.

En la fase inicial del proceso de diseño, se determinan los polos complejos conjugados deseados del sistema realimentado recién configurado, derivándolos a partir de las descripciones de diseño del sistema de control. Para este fin, expresamos la fórmula de los polos complejos conjugados como:

$$p_{ccd} = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{1 - \zeta^2} j \quad (3.49)$$

Donde:

ζ : Factor de amortiguamiento

w_n : Frecuencia natural no amortiguada.

Cabe recalcar que para el diseño es necesario sus especificaciones de respuesta temporal pertenecientes del sistema, los cuales son:

$$M_p \leq 15\% \qquad t_{ss} \leq 8s$$

Se deja despejado el valor del factor de amortiguamiento partiendo del máximo sobreimpulso $M_p \leq 15\%$, por medio de la expresión:

$$M_p = e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0.15$$

Reemplazamos el valor de M_p , calculamos el factor de amortiguamiento ζ , resolviendo la siguiente expresión:

$$e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 0.15 \rightarrow \zeta \geq 0.52$$

Con el objetivo de determinar la frecuencia natural no amortiguada, se emplea la ecuación para determinar el tiempo de establecimiento (t_{ss}), resultado que se presenta a continuación:

$$t_{ss} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \text{ (Criterio del 2\%)} \quad \text{y} \quad \text{se debe cumplir que: } t_{ss} = \frac{4}{\zeta\omega_n} \leq 8$$

Despejamos el valor de ω_n , para el valor crítico de $\zeta = 0.52$:

$$\frac{4}{8 \cdot \zeta} \leq \omega_n \rightarrow \omega_n \geq 0.9615 \text{ rad/s}$$

Con $\omega_n = 0.9615 \text{ rad/s}$ y $\zeta = 0.52$ como los valores críticos, se reemplaza en la ecuación (3.49) para su respectivo polo complejo conjugado, se tiene:

$$p_{cc} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}j = -0.49 \pm 0.8213j$$

Hay tener presente que el parámetro ζ funciona hasta el rango máximo de 1, por lo que el diseño del sistema con respuesta subamortiguada solo trabaja entre los valores del siguiente intervalo:

$$0.52 \leq \zeta \leq 1$$

Con el fin de tener una respuesta subamortiguada. Como valor de borde para que el parámetro de frecuencia natural funcione dentro de las especificaciones de diseño requeridas es en $\omega_n = 2.35$ con un valor de 15V como señal de control, la idea es no saturar el actuador por lo que se vuelve necesario varias pruebas de sintonización apreciando su correcto comportamiento y su adecuada respuesta de la planta

seleccionando varios valores de ζ y w_n en relación con las condiciones obtenidas previamente, estos valores que satisfacen las características y parámetros de diseño estableciendo un rango de intervalo seguro son los siguientes:

$$\zeta = 0.95 \qquad w_n = 1.95$$

Hay que tener en cuenta que si se alteran los valores de ζ y w_n presentan cambios en la respuesta de tiempo del sistema, como ejemplo, si se aumenta al máximo valor de sobreimpulso (M_p), el tiempo de estabilización (t_{ss}) decrece, el ángulo θ aumenta y por lo tanto aumenta la señal de control $u(t)$.

Es importante considerar estas condiciones al momento de seleccionar los valores de ζ y w_n porque seleccionando estos parámetros, se está dando ubicación a los nuevos polos del sistema realimentado que se va a diseñar, permitiendo la modificación del comportamiento del sistema antiguo.

Después de haber seleccionado los valores de ζ y w_n se puede determinar los polos dominantes del sistema por medio de la ecuación 3.49, donde se obtienen los polos complejos conjugados, teniendo como resultado lo siguiente:

$$p_{cd} = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{1 - \zeta^2}j = -(0.95)1.95 \pm 1.95 \sqrt{1 - 0.95^2}j$$

$$p_{cd} = -1.8525 \pm 0.6089j$$

Como es un sistema de 5 estados, ósea es un sistema aumentado, de los cuales 4 son los estados del sistema y 1 perteneciente al estado de seguimiento, hasta el momento se cuenta con dos polos, se muestran a continuación:

$$p_1 = -1.8525 \pm 0.6089j$$

$$p_2 = -1.8525 \pm 0.6089j$$

Estos polos son dominantes y determinan la dinámica del sistema. Los consiguientes estarán más distantes que los dominantes, posteriormente se tienen los siguientes valores seleccionados después de haber realizado pruebas experimentales:

$$p_3 = -3 \quad p_4 = -3.5 \quad p_5 = -10$$

Se ubicaron los valores de p_3 y p_4 alrededor del valor de -3, ya que de manera experimental se corrobora que es posible controlar de mejor manera el tamaño de la señal de energía de control $u(t)$ próxima a esta posición, por que si se lo ubica mas

lejano se vuelve mas complicado el control del tamaño de esta señal, tambien suele caer en saturación en menos tiempo, por lo que resulta menos controlable.

Con estos 5 polos seleccionados se procede a armar el vector de polos complejos conjugados, este nuevo vector nos permitirá dominar la dinámica del sistema:

$$p = [-1.8525 + 0.6089j \quad -1.8525 - 0.6089j \quad -3 \quad -3.5 \quad -10]$$

Dado este vector p, se llevará a cabo la posición de polos del sistema modificado en las ubicaciones especificadas por ese vector.

El siguiente paso será calcular el vector de control para que se establezca en los polos dados del nuevo sistema en los valores deseados del vector “p”, para poder llegar a este objetivo se emplea el programa de cálculo numérico, empleando el comando “place” y generando como argumento de la función las matrices del sistema aumentado en conjunto con el vector p, dando como resultado el vector de control de realimentación, es el que se procede a mostrar:

$$K_a = [-0.5906 \times 10^7 \quad -3.1212 \times 10^7 \quad -1.6573 \times 10^7 \quad 0.0219 \times 10^7 \quad 0.3488 \times 10^7]$$

Hay que recordar, este vector de realimentación del sistema aumentado K_a , parte de la unión de dos valores:

$$K_a = [K_r \quad -k_i]$$

Entonces el vector K_r y k_i están determinados de la siguiente forma:

$$K_r = [-0.5906 \times 10^7 \quad -3.1212 \times 10^7 \quad -1.6573 \times 10^7 \quad 0.0219 \times 10^7]$$

$$k_i = [-0.3488 \times 10^7]$$

Ya obtenido los respectivos vectores de control para el servosistema, se calcula los autovalores del sistema en lazo cerrado:

$$\text{eig}(A_a - B_a K_a) = \begin{bmatrix} -10 \\ -3,5 \\ -3 \\ -1,8525 + 0,6089i \\ -1,8525 - 0,6089j \end{bmatrix}$$

Con base en los autovalores derivados del sistema en lazo cerrado recientemente configurado, se evidencia que el controlador ha colocado exitosamente los nuevos

polos del sistema en la posición deseada. En otras palabras, la dinámica del sistema ha sido modificada de acuerdo con el diseño establecido. El modelo en el espacio de estados del sistema realimentado resultante, que incorpora el seguimiento de referencia, se expresa como:

```

Sistema de Control Pole Placement Realimentado

sys_r =

A =
      x1      x2      x3      x4      x5
x1      0      1      0      0      0
x2  16.27  10.97  28.56  4.494 -9.605
x3      0      0      0      1      0
x4 -112.8 -76.16 -156.6 -31.18  66.63
x5      -1      0      0      0      0

B =
      u1
x1      0
x2  2.754e-06
x3      0
x4 -1.91e-05
x5      0

C =
      x1  x2  x3  x4  x5
y1  1  0  0  0  0

D =
      u1
y1  0

Continuous-time state-space model.

```

Figura 33. Sistema de espacio de estados realimentado mediante ubicación de polos con el seguimiento a la referencia.

Se llevó a cabo la implementación de este sistema de realimentación mediante ubicación de polos con seguimiento a la referencia resultando en el modelo de la figura 33, haciendo uso del software de simulación numérica con el fin de visualizar los resultados de este servosistema diseñado, a continuación de muestra la imagen de la implementación en los bloques de programación:

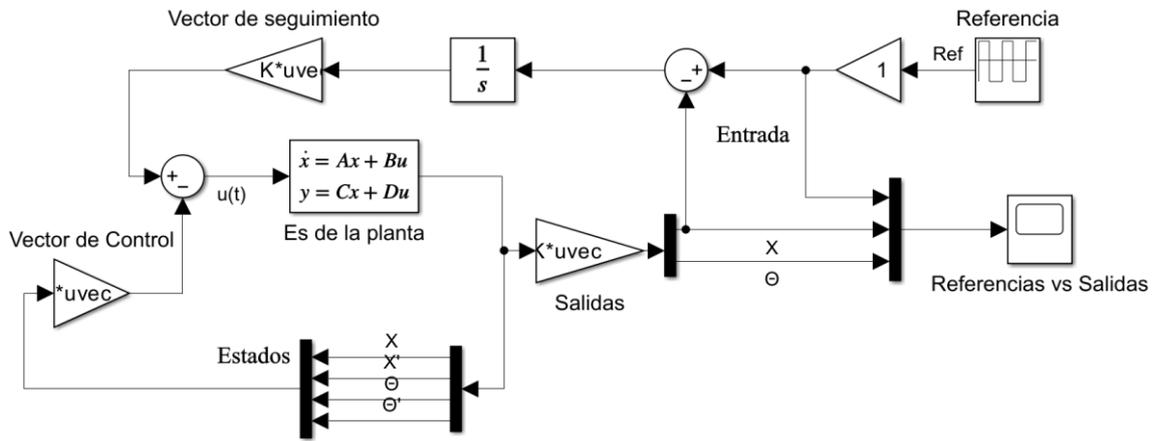


Figura 34. Servosistema control de realimentación por ubicación de polos en el Software de simulación numérica.

En la figura 34 se aprecia la implementación del modelo de espacio de estados aumentado con el servocontrol conformado por vector de seguimiento y por el vector control por realimentación de estados, cuando se ejecuta este sistema se obtiene las siguientes graficas:

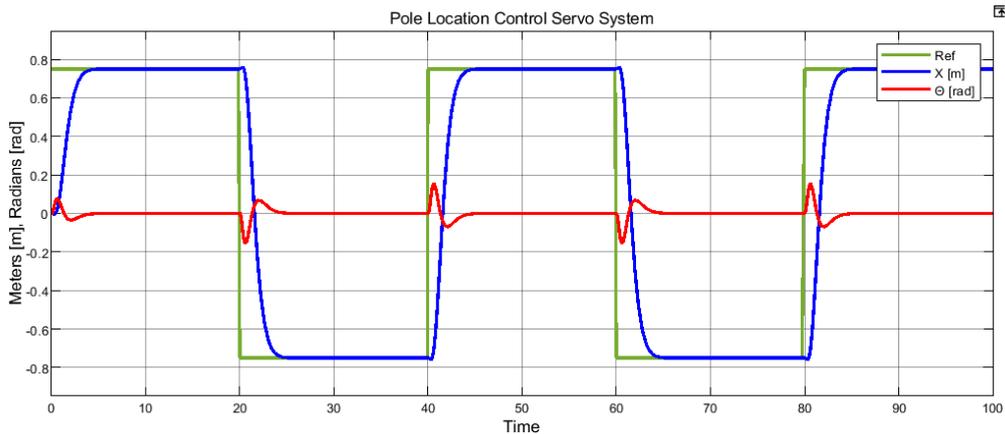


Figura 35. Salidas del Servosistema por ubicación de polos

En la imagen que muestra la figura 35 se aprecia el comportamiento de las salidas, las cuales son el ángulo de inclinación del péndulo y el desplazamiento del carro con seguimiento a la referencia en el sistema.

Las siguientes graficas se muestra el comportamiento de los estados a lo largo del tiempo de acción tanto de la velocidad como de la distancia recorrida, el ángulo de inclinación y la velocidad angular de inclinación del péndulo.

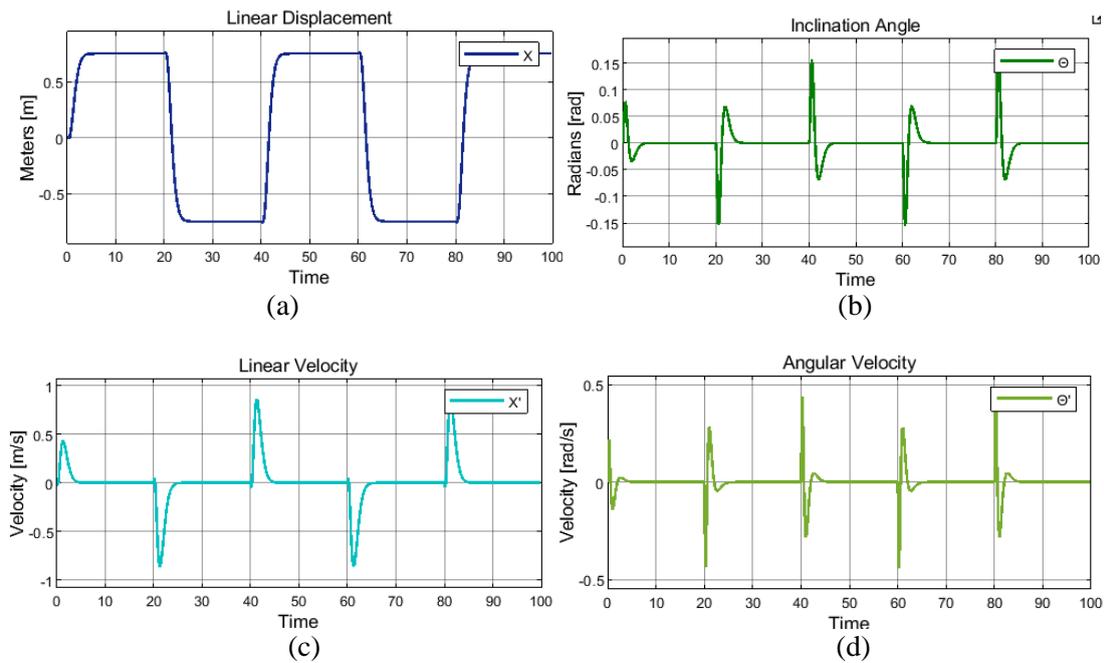


Figura 36. Estados del Servosistema. a) Seguimiento a la referencia de la distancia lineal, b) Ángulo de inclinación del péndulo, c) Velocidad del robot (metros sobre segundos) y d) Velocidad angular del péndulo

El comportamiento de los estados a lo largo del tiempo de ejecución se ve reflejado en la figura 36, donde, la referencia entre el intervalo de 0.75 y -0.75 para que el estado de distancia lineal del robot siga esta referencia, en la figura a) el seguimiento de este estado lo realiza de manera adecuada, el cual representa el desplazamiento lineal del robot. En la figura 36.b muestra el valor de ángulo que toma el péndulo para llegar a la referencia que el estado x sigue en este sistema de control, por lo tanto, para llegar a la distancia requerida por la referencia este, también requiere de cierta velocidad, esto se muestra en los estados de las gráficas inferiores, donde los picos de velocidad lineal son pronunciados en cada iteración en el cambio de valor en la señal de referencia (ver figura 36.c). También en el cambio del ángulo de inclinación que requiere de una velocidad para llegar a ello, este valor a lo largo de la simulación es mostrado en la figura 36.d.

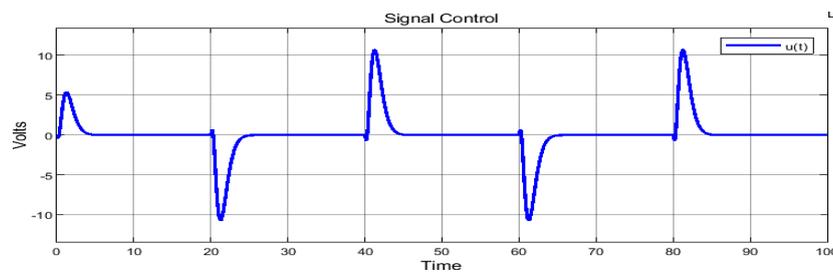
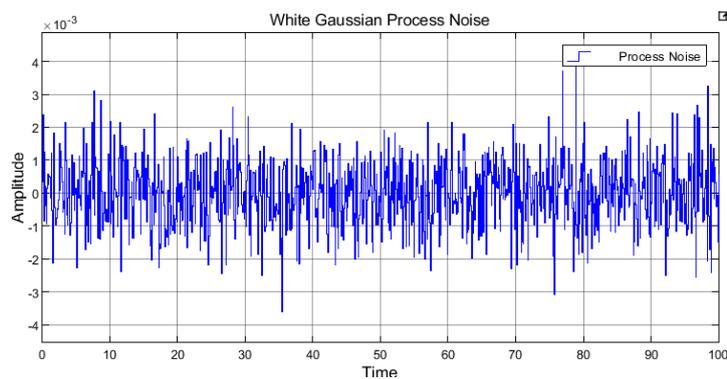


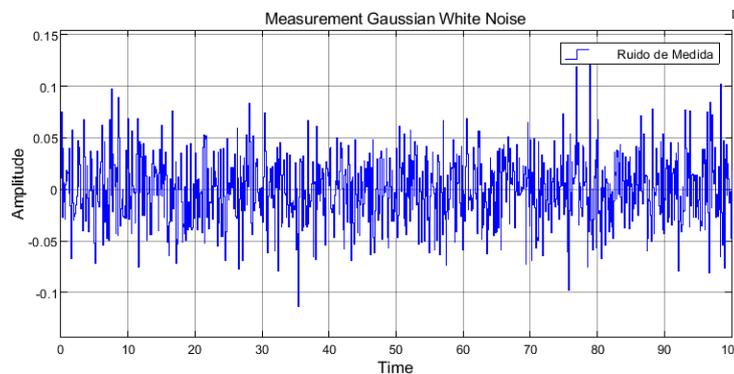
Figura 37. Señal de control del sistema

La señal necesaria para el seguimiento de la referencia muestra estos valores en una situación ideal del sistema balancín, esta señal de control de la figura 37 toma los valores necesarios para llevar rápidamente las salidas a los valores deseados y adquirir el correcto balanceo de la planta en la simulación.

Ahora, es importante resaltar que este sistema con estados aumentados no es el adecuado para ser afectado por los ruidos blancos gaussianos y ser alterado por perturbaciones, por tal motivo se demuestra mediante una simulación lo defectuoso del sistema frente a estas alteraciones, para ello se presenta las gráficas en la figura 38 de los ruidos blanco-gaussianos a emplear en el sistema.



(a)



(b)

Figura 38. Ruido Blanco Gaussiano de Proceso y de Medida.

En el siguiente esquema de programación por bloques dentro de un software numérico se presenta el servosistema ruidos de proceso y de medida:

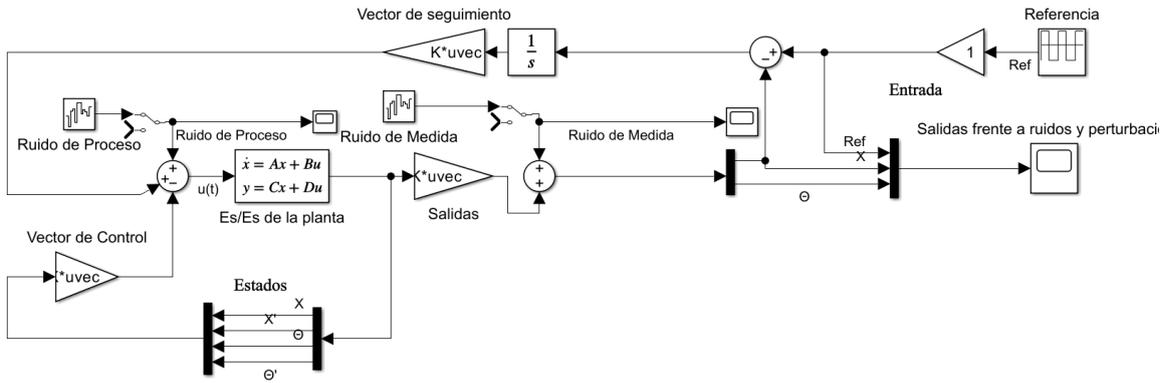


Figura 39. Servosistema de control por realimentación de estados y ubicación de polos, con Ruidos Blancos Gaussianos de proceso y de medida.

En la figura 39 se aprecia la implementación del mencionado servosistema de control mediante ubicación de polos, donde se incluyen los ruidos blancos gaussianos de proceso y de medida en la herramienta de simulación numérica por bloques, en la siguiente sección se procede a mostrar los resultados obtenidos a partir de la ejecución con los ruidos añadidos:

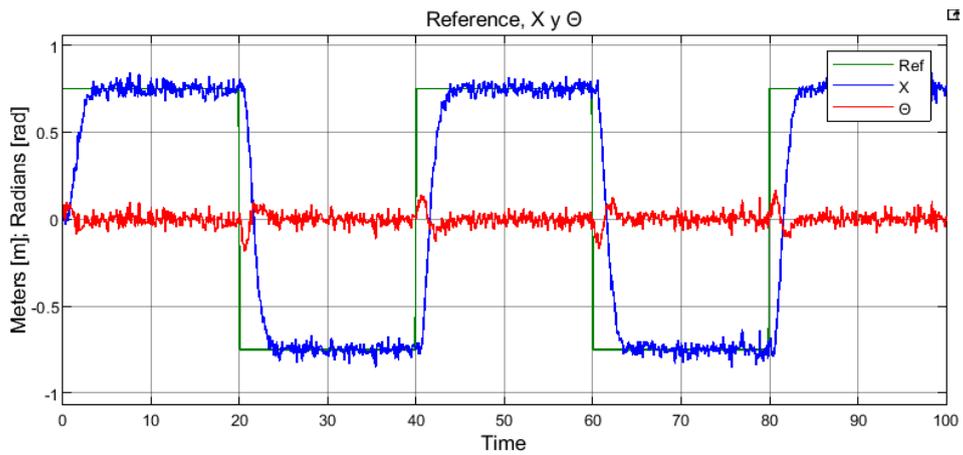


Figura 40. Salidas del servosistema con ruidos.

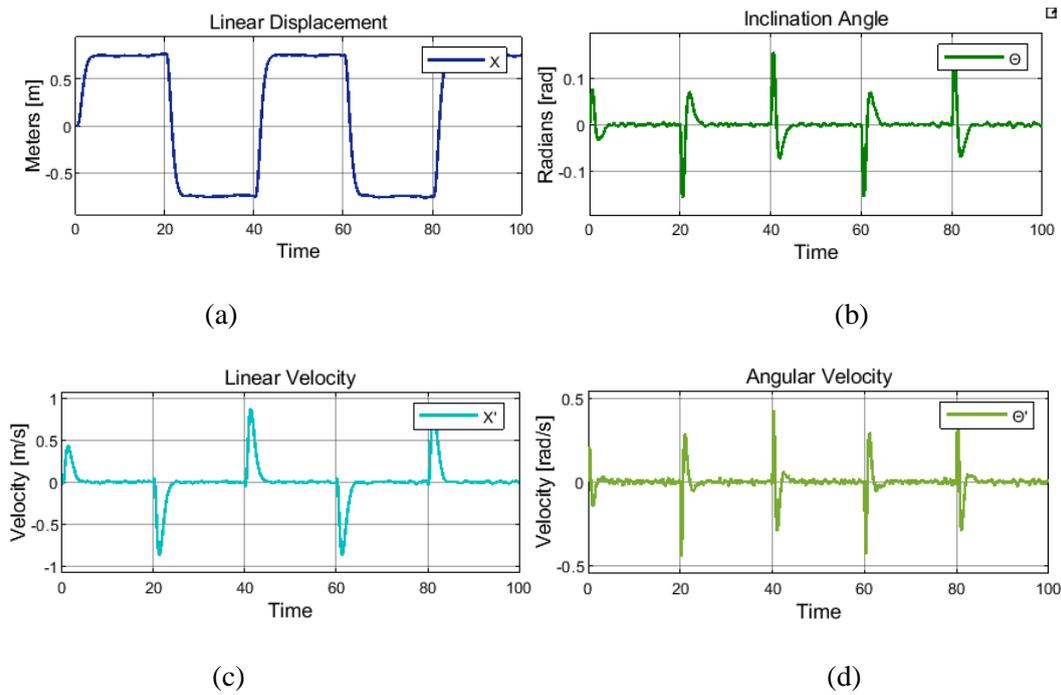


Figura 41. Estados del sistema con ruido blanco gaussiano.

En la figura 41.a muestra el comportamiento del estado X a lo largo del tiempo mientras este se encuentra afectado por perturbaciones que afectan el correcto ejecutamiento del sistema, lo mismo que la gráfica 41.c del estado \dot{X} el cual varía con estos ruidos ocasionando que la planta no funcione correctamente. El ver la figura 41.b del estado Θ así como el del estado $\dot{\Theta}$, estos también son afectados por estas perturbaciones con lo cual presentan variaciones indeseadas en la ejecución del sistema. Esto se demuestra también en las salidas que toma en cuenta para el robot el cual comparándolo con la referencia que sigue, presenta con mayor claridad el efecto de en el rendimiento del control en el sistema.

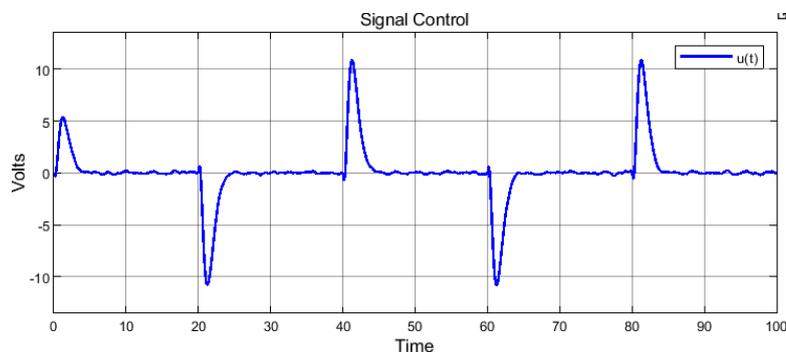


Figura 42. Señal de control del Servosistema con ruidos blancos gaussianos.

Como se puede deducir al examinar las figuras 40, 41 y 42, se concluye que el servosistema diseñado no exhibe la capacidad de filtrar y rechazar de manera efectiva

el ruido y las perturbaciones estocásticas incorporadas. Esta limitación se atribuye al hecho de que el diseño de dicho servosistema se llevó a cabo exclusivamente con la premisa de cumplir con las especificaciones de diseño predefinidas. No obstante, no se consideró la influencia de los ruidos externos y las perturbaciones estocásticas que se aplicaron durante el proceso de diseño.

Dada la naturaleza de los resultados presentados en la figura 41, se encuentra impedido el análisis y la cuantificación de los parámetros relativos a la respuesta temporal del sistema. Por lo tanto, se sustenta y se vuelve imperativo diseñar un filtro de Kalman con el propósito de integrarlo en el sistema de control en calidad de estimador óptimo de estados, aprovechando simultáneamente sus propiedades de filtrado de ruido gaussiano. En las secciones subsecuentes, se llevará a cabo el diseño del filtro de Kalman para este servosistema.

3.2.4.3 Diseño del Estimador Lineal Cuadrático (LQE)

En esta sección, nos enfocaremos específicamente en la mejora del diseño del filtro de Kalman, integrándolo como un estimador óptimo de estados en el servocontrol mediante ubicación de polos delineado en la sección precedente. Aprovecharemos las propiedades del filtro para gestionar ruidos gaussianos, vinculando así de manera coherente los estados óptimamente estimados del filtro con el vector de control por ubicación de polos, de manera análoga el enfoque empleado en el controlador por ubicación de polos mencionado en la sección previa.

Es necesario obtener todos los estados del servosistema, por tal motivo se procede a usar un estimador que proporcione estimaciones razonablemente precisas de todos los estados. Este es uno de los estimadores comúnmente utilizados que implementa un enfoque “óptimo”.

Para los sistemas invariantes en el tiempo con ruido se tiene en 3.50:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu + Gw \\ y &= Cx + Du + Hw + v\end{aligned}\tag{3.50}$$

Donde las funciones w y v ambos son ruido blanco medio cero gaussiano con una varianza W y V . Este estimador lineal cuadrático básicamente desarrolló una forma automatizada de encontrar la ganancia de estimación adecuada L para:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) &= C_y\hat{x}(t)\end{aligned}\tag{3.51}$$

$$\hat{z}(t) = C_z x(t)$$

Las matrices aumentadas derivadas del modelo en el espacio de estados son:

$$A_k = A \quad B_k = [B \quad G] \quad C_k = C \quad D_k = [D \quad H]$$

Posteriormente de ingresar este sistema aumentado en el programa de cálculo numérico, se tiene el siguiente resultado en matrices.

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -74,98 & -17,08 & 5,096 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 520,1 & 160,1 & -35,35 \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2,754 \times 10^{-6} & 1 \\ 0 & 1 \\ -1,91 \times 10^{-5} & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teniendo este conjunto de matrices aumentadas, se puede crear el modelo de espacio de estados siguientes:

```

Sistema aumentado para el filtro de Kalman
sys_k =

A =
      x1      x2      x3      x4
x1      0         1         0         0
x2      0    -74.98    -17.08    5.096
x3      0         0         0         1
x4      0    520.1    160.1   -35.35

B =
      u1      u2
x1      0         1
x2    2.754e-06    1
x3      0         1
x4   -1.91e-05    1

C =
      x1  x2  x3  x4
y1      1  0  0  0
y2      0  0  1  0

D =
      u1  u2
y1      0  0
y2      0  0

Continuous-time state-space model.

```

Figura 43. Sistema de espacio de estados aumentados para el diseño del filtro de Kalman.

Se toma en consideración al sistema aumentado dentro de la figura 43, el cual se configura para tener 2 salidas para el servosistema de control. El proceso siguiente es la selección de las matrices de covarianza de error Q_k y R_k , donde posteriormente se obtuvo los siguientes valores después de haber experimentado para obtener magnitudes

que generen el mejor resultado posible para nuestro filtro estimador, y estos son los valores que generan el mejor comportamiento para el filtrado de Kalman:

$$Q_k = 100 \quad R_k = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 95000 \end{bmatrix}$$

Los elementos de la matriz Q_k se conceptualiza como la magnitud del ruido asociado a los estados, conocido como ruido de proceso. Por otro lado, los componentes de la matriz R_k representan el ruido presente en las salidas del sistema o el ruido de medición inherente a los sensores del sistema. La selección apropiada de las matrices Q_k y R_k desempeñará un papel determinante en el desempeño del filtro de Kalman, no solo como estimador óptimo, sino también como un eficiente filtro para el ruido gaussiano presente en el sistema.

Al haber obtenido nuestro sistema aumentado en el modelo de espacio de estados y también nuestras matrices de covarianza de error, ahora se puede introducir los comandos necesarios el diseño del filtro de Kalman, dentro de la herramienta que se está empleando se utiliza el comando “kalman” y como argumento en la entrada son el servosistema y las matrices de covarianza ya obtenidos. En la ventana de comando tenemos el siguiente resultado de la figura 44:

```

Kest =

A =
      x1_e      x2_e      x3_e      x4_e
x1_e  -1.023      1  -0.2881      0
x2_e  -4.416  -74.98  -18.87  5.096
x3_e  -27.37      0  -11.11      1
x4_e  -161.8  520.1  94.37  -35.35

B =
      u1      y1      y2
x1_e      0  1.023  0.2881
x2_e  2.754e-06  4.416  1.792
x3_e      0  27.37  11.11
x4_e  -1.91e-05  161.8  65.7

C =
      x1_e  x2_e  x3_e  x4_e
y1_e      1      0      0      0
y2_e      0      0      1      0
x1_e      1      0      0      0
x2_e      0      1      0      0
x3_e      0      0      1      0
x4_e      0      0      0      1

D =
      u1  y1  y2
y1_e  0  0  0
y2_e  0  0  0
x1_e  0  0  0
x2_e  0  0  0
x3_e  0  0  0
x4_e  0  0  0

Input groups:
  Name      Channels
KnownInput  1
Measurement 2,3

Output groups:
  Name      Channels
OutputEstimate 1,2
StateEstimate  3,4,5,6

Continuous-time state-space model.

```

Figura 44. Modelo de espacio de estados del sistema aumentado con el filtro de Kalman aplicado.

De igual manera se tiene como salida el vector de ganancias pertenecientes al filtro L y las matrices de covarianza de error P :

$$L = \begin{bmatrix} 1,0277 & 0,2881 \\ 4,4164 & 1,7924 \\ 27,3727 & 11,1137 \\ 161,8297 & 65,7007 \end{bmatrix} \quad P = 1 \times 10^7 \begin{bmatrix} 0,0001 & 0,0004 & 0,0027 & 0,0162 \\ 0,0004 & 0,0027 & 0,010 & 0,1007 \\ 0,0027 & 0,0170 & 0,1056 & 0,6242 \\ 0,0162 & 0,1007 & 0,6242 & 3,6898 \end{bmatrix}$$

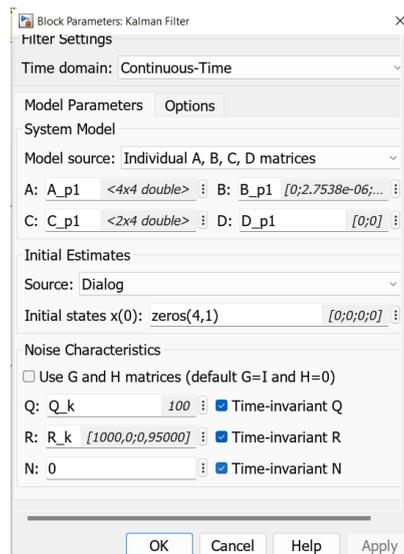
Posteriormente después de haber obtenido la matriz de covarianzas de error P, junto con la matriz de ganancias L y el modelo de espacio de estados del filtro de Kalman, ya tenemos diseñado el filtro de Kalman, está listo para su implementación al servosistema de control diseñado en la sección previa. Dentro de la simulación realizada en la interfaz de programación por bloques se puede hacer uso del elemento “Kalman filter” para añadirlo a nuestro sistema aumentado de control realimentado mediante ubicación de polos.

Estas configuraciones realizadas a los parámetros dentro del bloque filtro Kalman, fue en base al diseño que se hizo en la sección anterior. En este bloque se trabaja con la opción “Continuous-time” y se introduce las matrices de estados del sistema de manera individual en este bloque de Kalman,

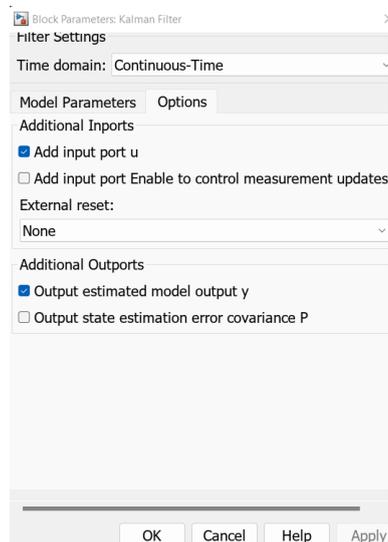
Similarmente los valores iniciales también son ingresados en este bloque pero se los setea en cero en la sección “Initial States $x(0)$ ”, se coloca “zeros(4,1)”. Esta configuración nos permite inicializar en 0 el sistema del filtro estimador.

Estando en el apartado “Noise Characteristics” (ver figura 45a), se colocan las variables correspondientes a las matrices de covarianza de ruido de medida y de proceso, De manera inversa quedaría Q_k y R_k , en relación a esto, se seleccionan las siguientes opciones: “Time Invariant R”, “Time Invariant Q”, “Time Invariant N”, en el apartado N se la asigna el valor de 0, también se deja en blanco en el espacio “Use G and H matrices”, posteriormente cambiamos a la pestaña de “Options”.

Al examinar la figura 45b se ve la pestaña “Options”, y activamos la opción “Output estimated model output” y dentro de la sección “Additional Outports”. Al seleccionar esta opción, especificamos que el filtro debe contar con un puerto de salida adicional, el cual proporciona las salidas estimadas y filtradas de manera óptima.



(a)



(b)

Figura 45. Captura del Block Parameters: Kalman Filter, pestaña Model Parameters (a) y pestaña Options (b).

Una vez concluida la configuración del bloque del filtro de Kalman, procederemos a su prueba e implementación en conjunto con el servosistema de control en el software de simulación. Con el fin de verificar el rendimiento adecuado del filtro, se aplicarán ruidos blancos gaussianos son perturbaciones externas. Es importante destacar que, en esta etapa, no conectaremos los estados estimados óptimos del filtro de Kalman al vector de control. En esta ocasión, nos enfocaremos exclusivamente en el diseño del filtro, analizando sus características, ventajas y contribuciones al servosistema del control.

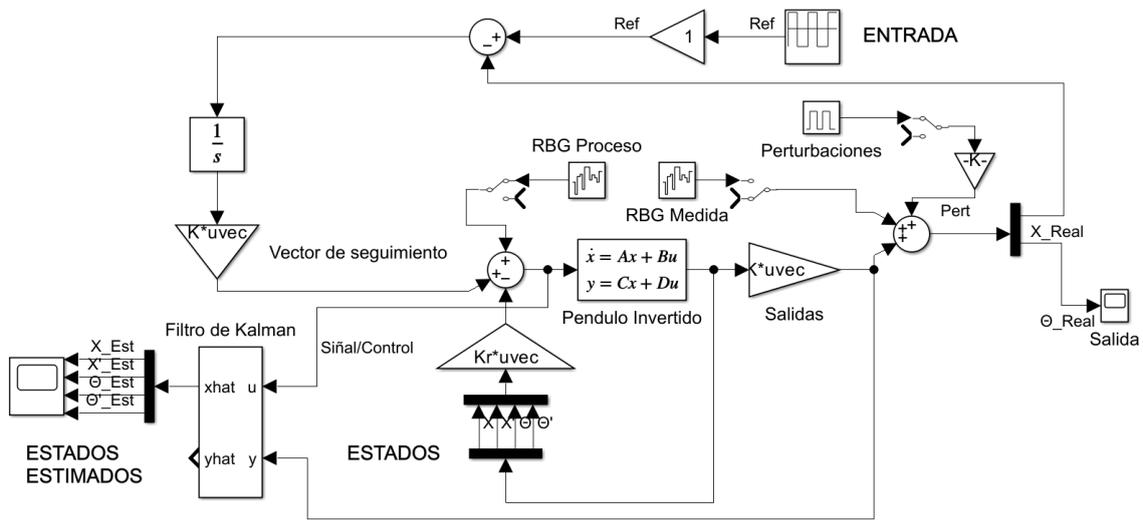


Figura 46. Implementación del filtro de Kalman en el sistema estimado.

Implementado y comprobación del filtro de estimador con el servosistema de control se ve en la figura 46. En esta instancia, los estados estimados óptimos del filtro de Kalman no han sido conectados al vector de control, ya que el objetivo es exclusivamente analizar las características y contribuciones del filtro. En consecuencia, se generarán los resultados y gráfico que representan los estados estimados óptimos y las salidas estimadas del filtro. Estos resultados se compararán con las salidas reales, permitiendo una evaluación exhaustiva de la eficacia y precisión del filtro en la atenuación de ruido, como se muestra en las gráficas subsiguientes:

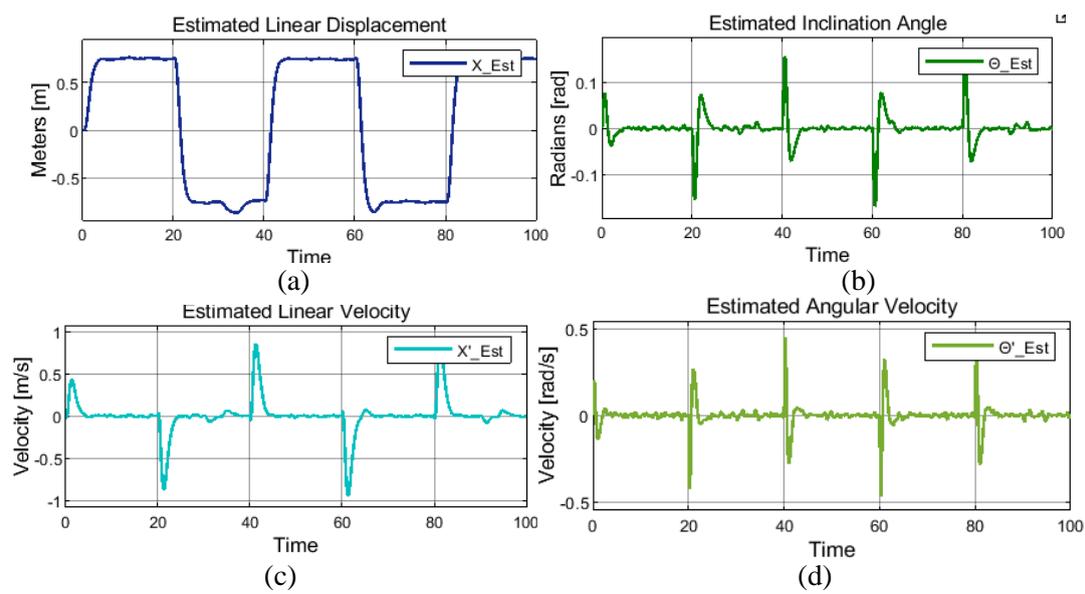


Figura 47. Estados Estimados Óptimos.

La imagen que muestra la figura 47 presenta la capacidad del filtro de Kalman como un estimador óptimo de estados el proporcionar estados estimados que minimizan eficientemente la matriz de covarianza de error.

El estado estimado de la figura 47.a muestra la capacidad e observación del sistema virtual, estos efectos estocásticos de los ruidos que sufre el sistema se ven eficientemente disipación a un nivel aceptable, lo que se refleja también en la gráfica de estado diferencial en el desplazamiento lineal (figura 47.c). Tomar en consideración que al sistema se le añadió una perturbación externa en la salida lo que causa una oscilación en la respuesta del sistema, permitiendo desafiar la capacidad de control y observación de la planta. El ruido que afecta al sistema, también se muestra su filtrado en la figura 47.b del estado Θ , donde a lo largo de las iteraciones toma un comportamiento menos ruidoso, además de la figura 47.d que representa la velocidad de inclinación del péndulo ($\dot{\Theta}$).

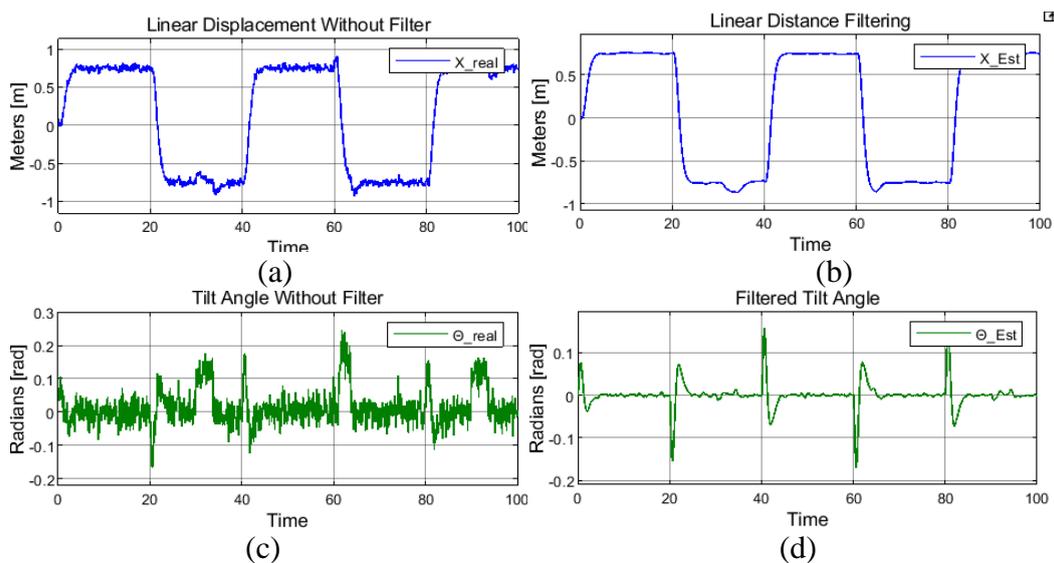


Figura 48. Salidas de la planta sin filtro y filtrado.

El filtro demuestra una destacada capacidad para filtrar el ruido presente en las señales. Estos estados estimados resultantes están preparados para ser conectados al vector de control por ubicación de polos, facilitando así la integración del filtro dentro del sistema de control diseñado.

Lo que se observa en la figura 48.a es la salida del desplazamiento lineal afectada por ruidos y perturbaciones, lo que complica la estabilidad del control. De igual manera, en la sección c de la figura 48. Sin embargo, al revisar las salidas del

sistema estimado (figura 48.b y figura 48.d), se hace evidente la necesidad de filtrar estas señales.

En esta, se lleva a cabo una comparación entre las salidas del servosistema sin el uso del filtro de Kalman y las salidas estimadas óptimamente mediante el filtro. Esta comparación revela una marcada diferencia en la calidad y precisión de las señales obtenidas, evidenciando la notable reducción del ruido gaussiano y la similitud cercana a las señales reales. La estimación óptima del filtro confiere confiabilidad, lo que posibilita mediciones precisas de los parámetros de la respuesta temporal del sistema.

La próxima sección discutirá la integración de los estados estimados óptimos del filtro de Kalman con el servosistema por ubicación de polos diseñado previamente.

Con base en los resultados obtenidos, tanto en la representación gráfica como en el cumplimiento de las especificaciones de diseño, se logró configurar un sistema de control de seguimiento de referencia mediante la técnica de ubicación de polos, al cual se le integró un filtro de Kalman, dando lugar a un servo-controlador estocásticos. Sin embargo, en contraste con el servo-controlador estocástico. Sin embargo, esta implementación no busca minimizar la magnitud de la señal de control y otras variables cruciales. A pesar de esto, se concluye que el servosistema diseñado y simulado cumple de manera exitosa con las especificaciones de diseño, demostrando robustez frente a ruidos y perturbaciones estocásticas.

3.2.4.4 Tiempo de estabilización de la respuesta

Los resultados obtenidos se evidencian en los siguientes gráficos, además de los cálculos correspondientes que permiten apreciaciones en las especificaciones en el diseño del sistema de control. Se determina el t_{ss} para una tolerancia del 2%, y es necesario obtener este valor partiendo del tiempo en el infinito, es decir al tiempo estable.

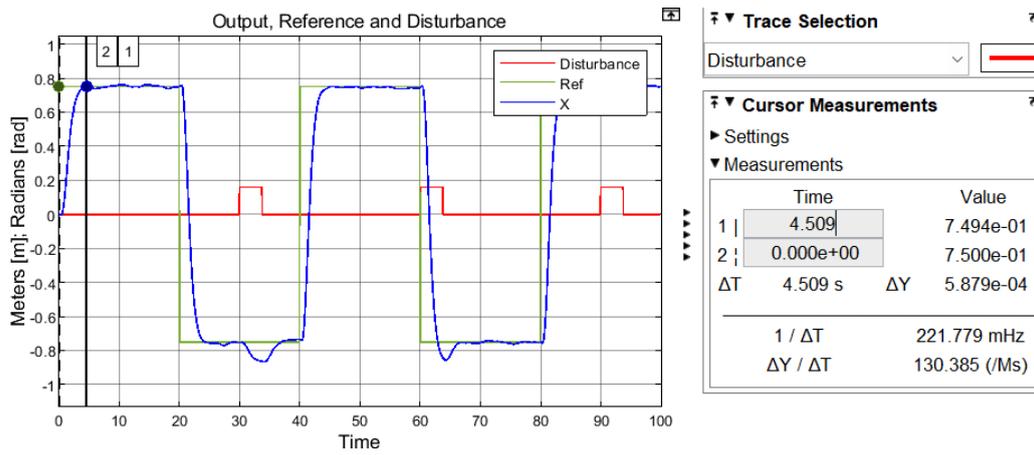


Figura 49. Grafica de medición del t_{ss} para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.

Para la tolerancia del 2%, se tiene el siguiente procedimiento:

$$y_{\max} = 0.75 + 0.02(0.75) = 0.765$$

Valor del tiempo: $t_{ss} = 4.509s$

3.2.4.5 Máximo valor de sobre impulso de la respuesta

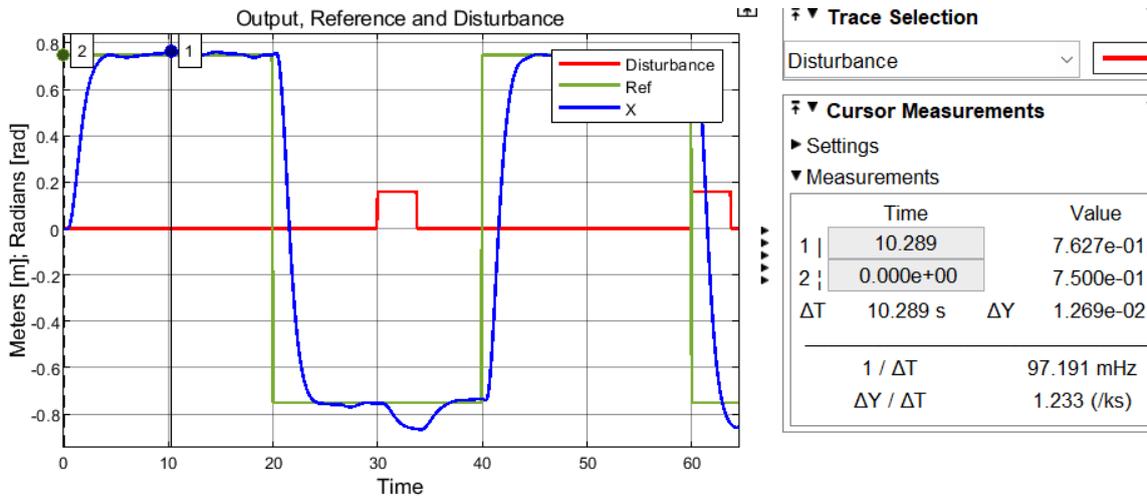


Figura 50. Grafica de medición del M_p en la señal de salida para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.

Para el cálculo de M_p se procede de la siguiente manera:

$$M_p = \frac{0.7625 - 0.75}{0.75} = 0.0169$$

$$M_p = 1.69\%$$

3.2.4.6 Ángulo de Inclinación del péndulo con respecto a la respuesta

Para el desarrollo de esta sección se da a conocer de manera gráfica de magnitud inicial referido al ángulo por la condición inicial, además del intervalo de valores obtenidos al estabilizarse a lo largo del tiempo, estos gráficos obtenidos se muestran en grados.

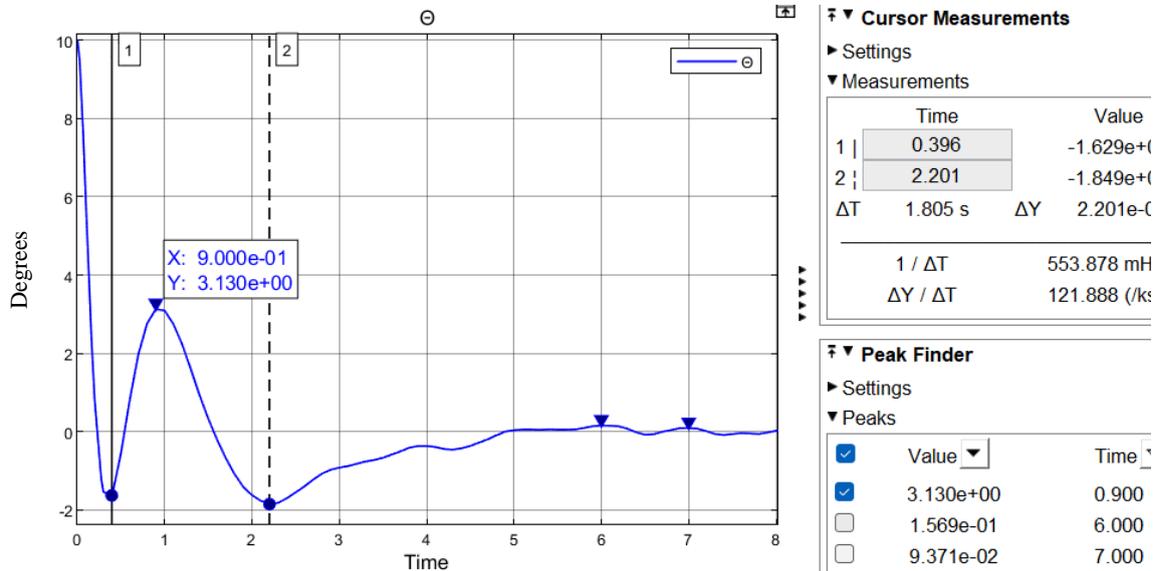


Figura 51. Valor inicial perteneciente ángulo de inclinación $\theta(t)$ en el sistema por ubicación de polos.

La figura 51 muestra que, como condición inicial del sistema a controlar, el ángulo empieza con el valor de partida de 10° , para posteriormente descender a un valor de $-1,629^\circ$, después de subir a un valor poco más de 3° llega a un valor mínimo de $-1,849^\circ$, por último, llega a estabilizarse en el intervalo de magnitudes que satisfacen los requerimientos del diseño.

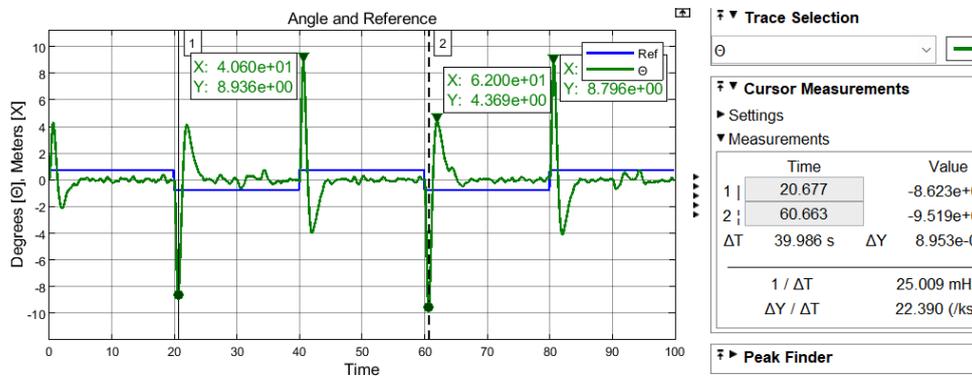


Figura 52. Rango de los valores el ángulo de inclinación $\theta(t)$ para el sistema por ubicación de polos.

En la figura 52 se observa como a lo largo del tiempo el comportamiento del péndulo de la simulación balancín oscila el grado de inclinación en cada cambio del valor de referencia y lo hace entre el rango de valores:

$$-9,011^{\circ} \leq \theta \leq 8,936^{\circ}$$

Los valores máximos y mínimos que se obtiene a partir del ángulo partiendo de la condición inicial establecidas el sistema péndulo invertido son:

$$\theta_{\max} = 10^{\circ} \qquad \theta_{\min} = -1,849^{\circ}$$

3.2.4.7 Señal de Control

A continuación, se muestra los valores de la señal de control de manera gráfica y como este se comporta a lo largo del tiempo, la energía de control $u(t)$ se muestra a continuación:

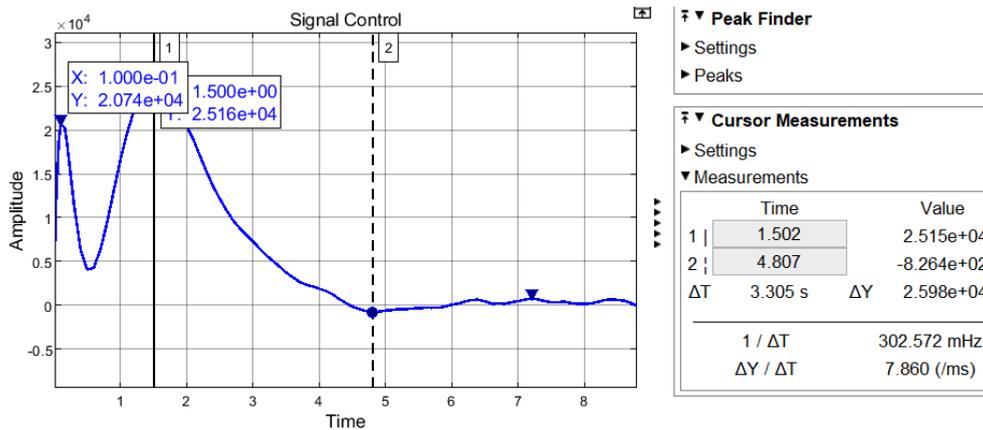


Figura 53. Valores iniciales de la señal de control $u(t)$ para el control mediante ubicación de polos LQE.

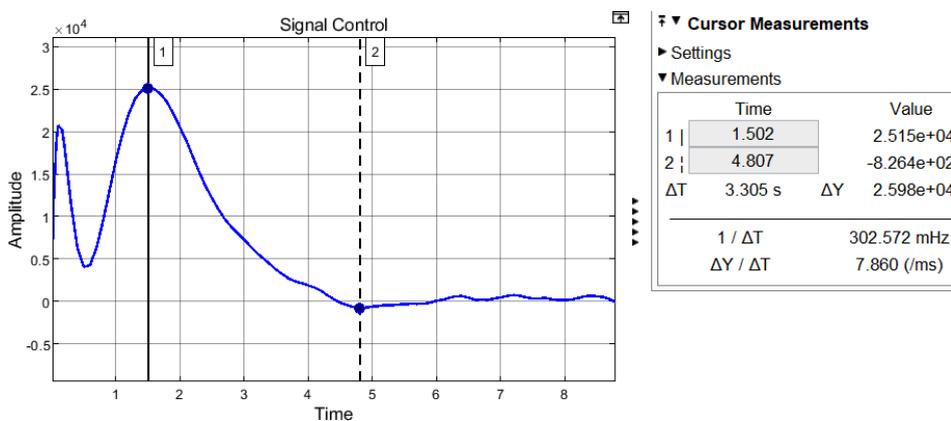


Figura 54. Magnitudes máximos y mínimos en la señal de control $u(t)$ para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.

Para poder apreciar de manera clara la gráfica e interpretarla de forma correcta se realiza los siguientes cálculos en los valores pico e iniciales, considerando el valor de la constante de relación entre la acción de control (como señal) y la voltaje de control que nos permite llevar a voltios la señal de control. Entonces en la figura 53 y 54 se denota que la señal de control inicia aproximado a 3,798V ($20740 \times 0,00018311$), como máximo valor alcanzado de voltaje es de 4,607V ($25160 \times 0,0001831$) y de mínimo valor se tiene -0,15134V ($-826,5 \times 0,00018311$) con lo cual llega a estabilizarse.

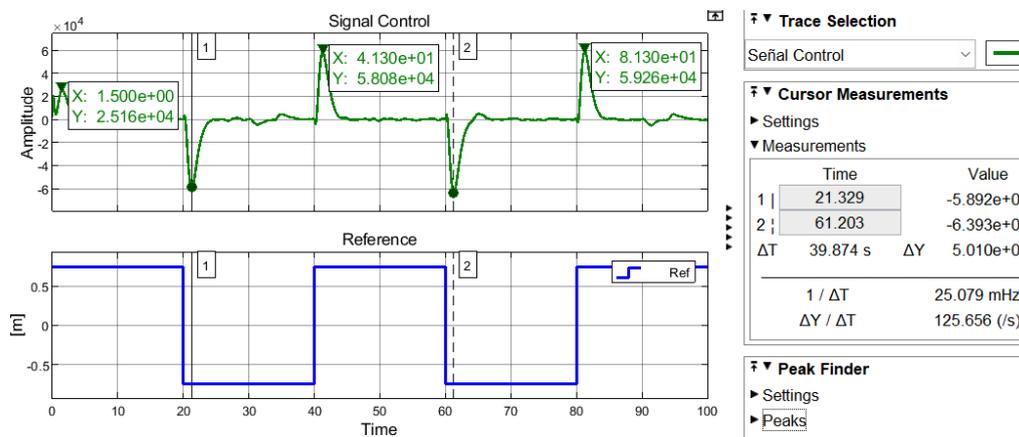


Figura 55. Rango de valores de la señal de control $u(r)$ para el servocontrol mediante ubicación de polos LQE.

El comportamiento de respuesta en el ángulo de inclinación del sistema balancín se efectúa con cada cambio de valor en la referencia, donde se aprecia intervalo de valores en la figura 55 que se inclina el péndulo con respecto a la vertical, este intervalo es:

$$-63930 \leq u(t) \leq 59260$$

$$-11,706V \leq u(t) \leq 10,851V$$

Por causa de la configuración inicial del ángulo, la señal de control $u(t)$ alcanza valores máximos y mínimos de pico (3,798V y -0.15134V). En este caso, debido a que el péndulo comienza desde un ángulo distinto de 0° , se suministrar una cantidad baja de energía al actuador para estabilizar el ángulo en 0° . Una vez que se logra la estabilización, la señal de control varía de acuerdo con los cambios en la señal de referencia, pero con un intervalo mayor y aun así permanecen dentro del rango mencionado anteriormente. Estos valores de la señal de energía $u(t)$ fueron calculados por el controlador para cumplir con las especificaciones de diseño establecidas. Sin

embargo, estos valores no son los mínimos necesarios, es decir, no son óptimos para la señal de control. Esto se debido a que el regulador no minimiza un indicador de rendimiento entre la energía de control y la velocidad del sistema, lo que implica que determina la señal de energía necesaria para satisfacer las especificaciones de diseño, pero no de manera óptima. Esto marca una diferencia significativa entre los sistemas de control óptimo y el servo-control por localización de polos con filtro de Kalman. A pesar de esto, se cumple con la especificación de diseño de $|\phi| \leq 12^\circ$ en todo momento.

3.3 Desarrollo del control en microcontrolador del Robot Balancín

Dentro de esta sección se procede con la aplicación del sketch de Arduino y la tarjeta de desarrollo para el control de cada uno de los actuadores que componen el sistema de la planta, para lo cual en el Anexo 78 se encuentra el código completo donde se incluye la librería del filtro de Kalman empleado para una mayor caracterización.

```
...
void setup(){
  IniciarPines();// Del MOTOR
  IniciarEncoder();
  iniciar(TIMER);
  Mpu6050.iniciar();
  delay(100);
}
void loop(){
  int bufer_direccion[] = {ADELANTE,
                          REVERSA,
                          DETENER};

  static unsigned long imprimir_tiempo;
  if(millis()-imprimir_tiempo > 500){
    imprimir_tiempo = millis();
    Control_de_Movimiento(bufer_direccion[0]);
  }
}
...
```

3.4 Comunicación serial mediante modulo Bluetooth

En esta etapa, se transmite información mediante bluetooth desde el robot de figura hacia la máquina para monitoreo y cumplimiento de objetivos. Se implementa una comunicación Simplex, que es unidireccional, permitiendo que los datos se muevan en una sola dirección de forma sencilla. Este protocolo nos permita intercambiar datos a corta distancia mediante transmisiones de radio de longitud de onda corta (alcance típico de alrededor de 10 metros).

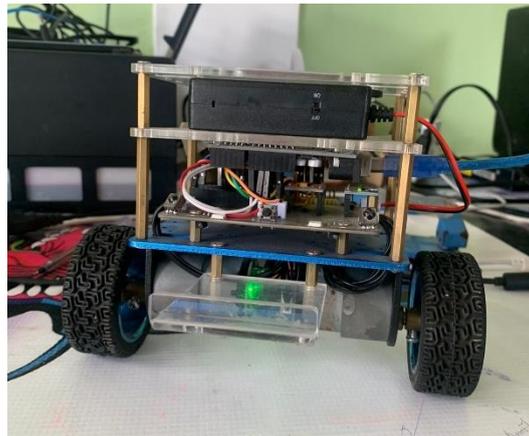


Figura 56. Planta real del Robot Balancín

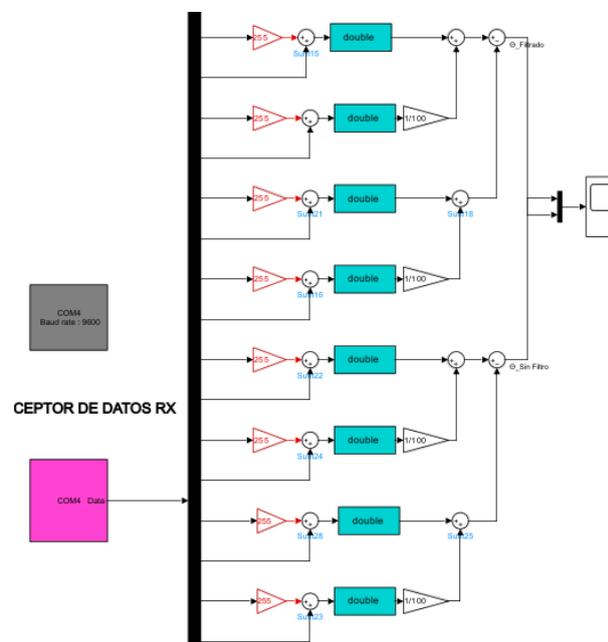


Figura 57. Bloques de comunicación serial simplex para el ángulo de inclinación.

Una vez configurada la conexión Bluetooth, la implementación del código en el microcontrolador Arduino y la creación del diagrama de bloques para la transmisión de

datos desde Simulink pueden verse afectados por la inestabilidad de la señal. Esta incertidumbre se traduce en una comunicación potencialmente inestable entre el robot y el software de monitoreo y control. A pesar de los esfuerzos por optimizar la comunicación Bluetooth, su susceptibilidad a interferencias y su alcance limitado este planteó un desafío significativo en términos de fiabilidad y consistencia en la observación remota de sistemas como se parecía en la figura 58.

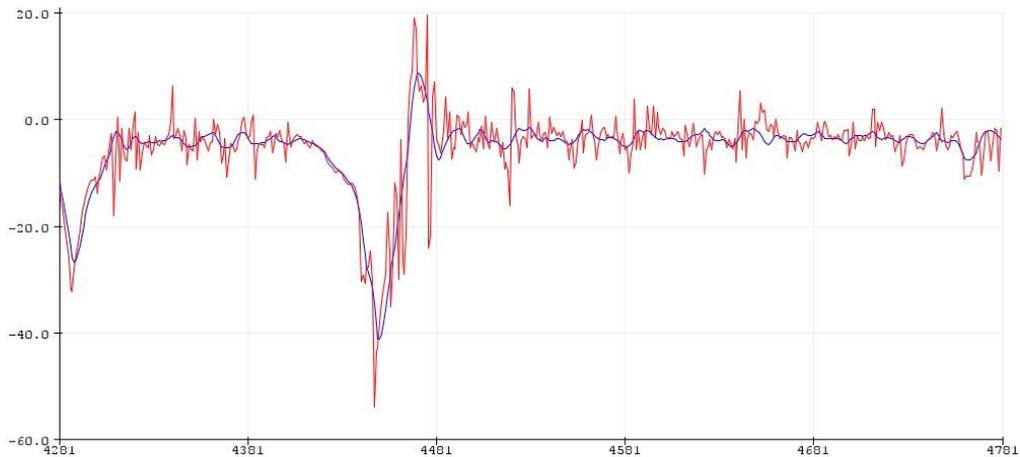


Figura 58. Recepción de la señal del ángulo del robot con el Serialplot.

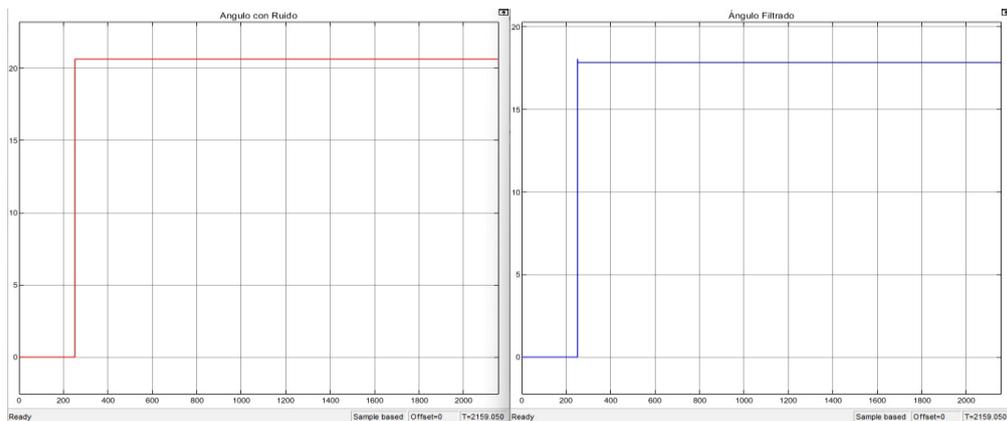


Figura 59. Recepción de la señal del ángulo de inclinación del robot mediante Bluetooth.

En la figura 58 se observa claramente la deficiencia en la comunicación serial inalámbrica a través del bluetooth en el software de simulación numérica en comparación con los datos obtenidos directamente en el plot serial de la figura 57. La imagen revela una lectura poco fiable del ángulo que el robot adquiere al estabilizarse mediante el control. Este inconveniente se relaciona directamente con los desafíos

mencionados anteriormente en cuanto a la comunicación vía bluetooth. La imprecisión en la lectura del ángulo puede atribuirse a la interferencia inalámbrica, la cual afecta la transmisión de datos entre el robot y el software de simulación. Lo que lleva a descartar por las limitaciones de este módulo Bluetooth y en su lugar se emplea directamente la comunicación serial mediante el cable para garantiza resultados precisos en la supervisión y control del robot durante su funcionamiento, donde se ven los siguientes resultados de la figura 59.

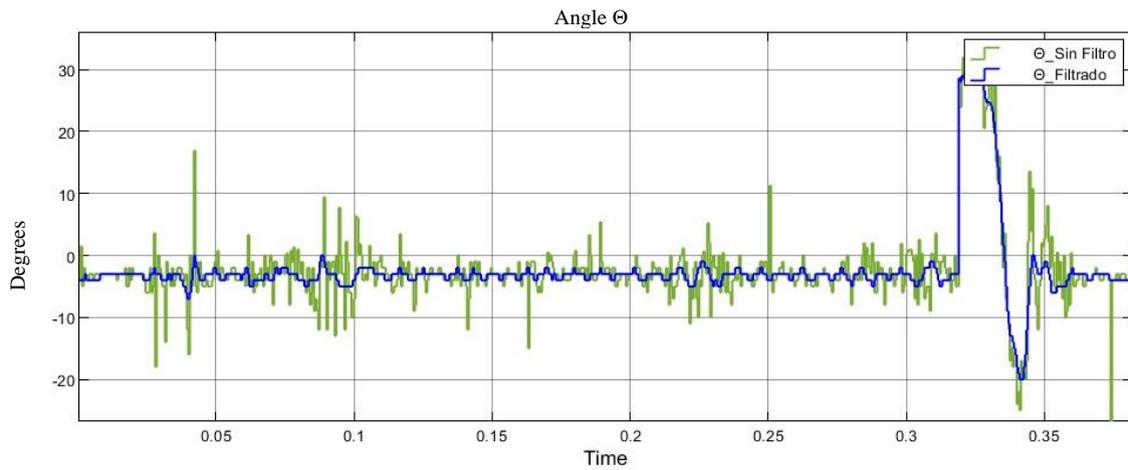


Figura 60. Recepción de la señal del ángulo de inclinación del robot mediante el Cables Serial.

CAPÍTULO IV

4 ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Dentro de este apartado se lleva a cabo la exposición de las pruebas de robustez llevadas a cabo en relación con el control estimador lineal cuadrático (LQE) previamente elaborado. Se sometió a ciertas pruebas tanto en un entorno de simulación numérica como en una configuración práctica, donde ha sido embebido en robot balancín. Esta interacción entre el control teórico y su implementación es explorada con el objetivo de analizar y contrastar la ejecución de este proceso en ambas instancias. La comparación de estos resultados obtenidos en el entorno de simulación y en la implementación con la planta real proporciona un aporte sustancial de información pertinente y fundamental para el desarrollo y formulación de propuestas a través de la investigación en teorías de control.

4.1 Análisis comparativo en rendimiento de control.

Los experimentos se llevados a cabo hacen uso de la interfaz gráfica proporcionada por el software de simulador Simulink.

4.1.1 Parámetros de medición ante pruebas de rendimiento.

Se llevará a cabo la comparación del rendimiento de los sistemas de control diseñados en el capítulo anterior mediante la evaluación de los parámetros de la respuesta temporal, que incluye:

- Tiempo de establecimiento (t_{ss}).
- Máximo sobreimpulso (M_p).

Y de igual manera con las variables más importantes del sistema (variable a controlar y variable de control):

- θ_{max} (Máximo ángulo de inclinación del péndulo).
- u_{max} (Máximo valor de la señal de control).

La comparación detallada se llevará a cabo en un entorno donde el sistema esté sujeto a ruido gaussiano, perturbaciones y condiciones iniciales. La elección de este contexto se basa en la necesidad de evaluar tanto el funcionamiento global del sistema como la contribución específica del filtro de Kalman. La razón subyacente es que la única manera efectiva de contrastar ambos sistemas es sometiéndolos a ruidos

gaussianos y perturbaciones. Evaluar el sistema sin estos factores y con el filtro de Kalman no sería significativo, ya que no se apreciaría completamente su influencia. Por lo tanto, la comparación se realizará bajo estas condiciones particulares para obtener una evaluación más precisa y representativa.

4.1.2 Servocontrol mediante ubicación de polos a partir de los parámetros del robot

En la Tabla 4 que a continuación se presenta donde se aprecia las magnitudes resultantes de los parámetros especificados para la simulación a partir de los parámetros del robot.

Tabla 4. Resultados del servocontrol mediante ubicación de polos con los parámetros del robot.

Especificaciones	Parámetros del sistema
Máximo valor de sobreimpulso	1,67%
Tiempo de establecimiento	$t_{ss}=4,482s$
Máximo valor de la señal de control	$u_{max}=5.36V$
Mínimo valor de la señal de control	$u_{min}=-11,61$
Máximo valor de ángulo de inclinación	$\theta_{max}=4.322^\circ$
Mínimo valor de ángulo de inclinación	$\theta_{min}=-9.51^\circ$
Intervalo en el ángulo de inclinación	$-9.51^\circ \leq \theta(t) \leq 8.89^\circ$

4.1.3 Servocontrol mediante ubicación de polos a partir de la matriz de identificación de la planta

A continuación, se presenta la Tabla 5, la cual resume las magnitudes obtenidas de los parámetros específicos durante la simulación, utilizando como referencia la matriz derivada de la identificación de la planta robótica.

Tabla 5. Resultados del servocontrol mediante ubicación de polos con los valores de identificación de la planta.

Especificaciones	Parámetros del sistema
Porcentaje Máximo de sobreimpulso	49,2%
Tiempo de establecimiento	$t_{ss}=4,432s$
Máximo valor de la señal de control	$u_{max}=0.03798V$
Mínimo valor de la señal de control	$u_{min}=-0.03851V$
Máximo ángulo de inclinación	$\theta_{max}=11.21^\circ$

Mínimo ángulo de inclinación	$\theta_{\min}=-11.45^{\circ}$
Intervalo de inclinación del péndulo	Intervalo: $-11.45^{\circ}\leq\theta(t)\leq 11.21^{\circ}$

Para el desarrollo de las pruebas de desempeño que se llevaron a cabo dentro de las simulaciones, se aplicó perturbaciones y bloques de ruidos blanco-gaussianos dentro del sistema para evaluar el comportamiento del servosistema de control con los valores que a continuación se muestran:

- Perturbación: 0.16

Valores de potencia de ruidos:

- Ruido Blanco Gaussiano de Proceso: 10^{-7}
- Ruido Blanco Gaussiano de Medida: 10^{-4}

4.2 Pruebas de desempeño en estimación de señales estocásticas control LQE

En la Tabla 6 Se explora el rendimiento del sistema de control mediante la Estimador Cuadrático Lineal en la estimación de señales estocásticas, Las pruebas detalladas permitirán evaluar la eficiencia y precisión de este enfoque frente a la incertidumbre de las señales ruidosas:

Tabla 6. Resultados del servocontrol mediante ubicación de polos con los parámetros del robot.

Control LQE	Q	R	Condiciones Iniciales	RBG Proceso	RBG Medida	Referencia	t_{ss}	M_p	e_{rr}	ECM
Prueba 1	100	1000 0	$\theta=0^{\circ}; x=0$	10^{-7}	10^{-4}	0,75	4,432	1,68%	7,98m	1,753 μ
Prueba 2		0 95000	$\theta=30^{\circ}; x=0,85$				4,859	1,693%	7,98m	1,753 μ
Prueba 3	100	200 0	$\theta=0^{\circ}; x=0$	10^{-8}	10^{-5}	0,36	4,478	1,11%	2,524m	0,1753 μ
Prueba 4		0 47500	$\theta=30^{\circ}; x=0,46$				5,702	1,11%	2,524m	0,1753 μ

Para esta primera experimentación se realizan dos pruebas de evaluación en las cuales se trabajará con los valores determinados de matriz de covarianza de proceso y de medida, también ruidos de proceso, ruidos de medida y valor determinado de referencia.

4.2.1 Condición Inicial 1: $\theta=0^{\circ}; x=0$.

A continuación, se lleva a cabo las pruebas de rendimiento en primer lugar con condiciones iniciales en 0 en los estados θ y x .

4.2.1.1 Tiempo de establecimiento

A continuación, en la siguiente grafica se muestra el tiempo que le toma a la planta mantenerse en la referencia en el sistema.

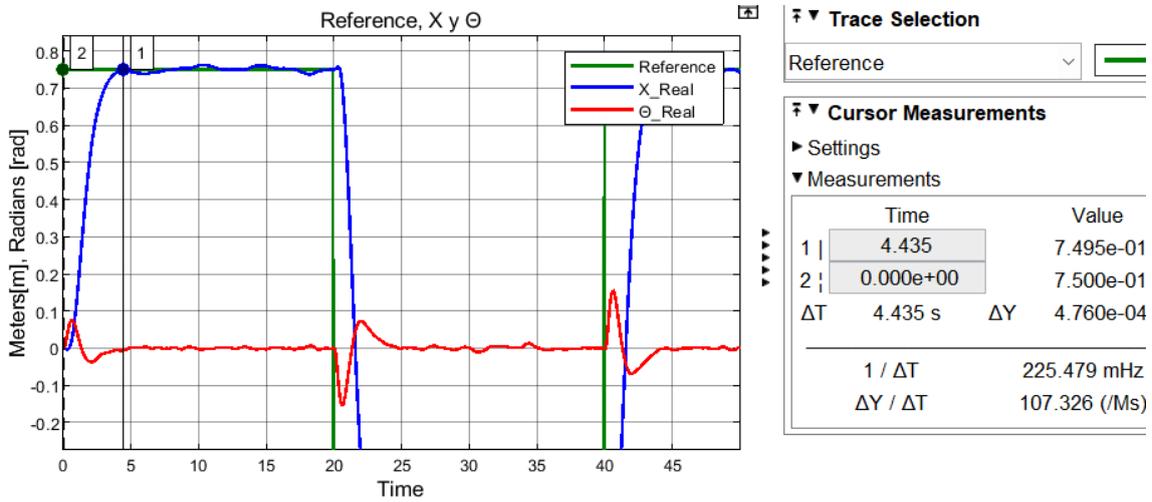


Figura 61. Gráfica para análisis comparativo del tiempo de establecimiento del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE

En la figura 61 se puede divisar que en el tiempo de 4,435 segundos llega a estabilizarse en la distancia que se espera mientras se mantenga ese valor de referencia.

4.2.1.2 Cálculo de máximo sobreimpulso

Para el cálculo del valor porcentual de sobre elongación de la señal con respecto a la referencia se parte de la herramienta de medición en el programa de simulación numérico.

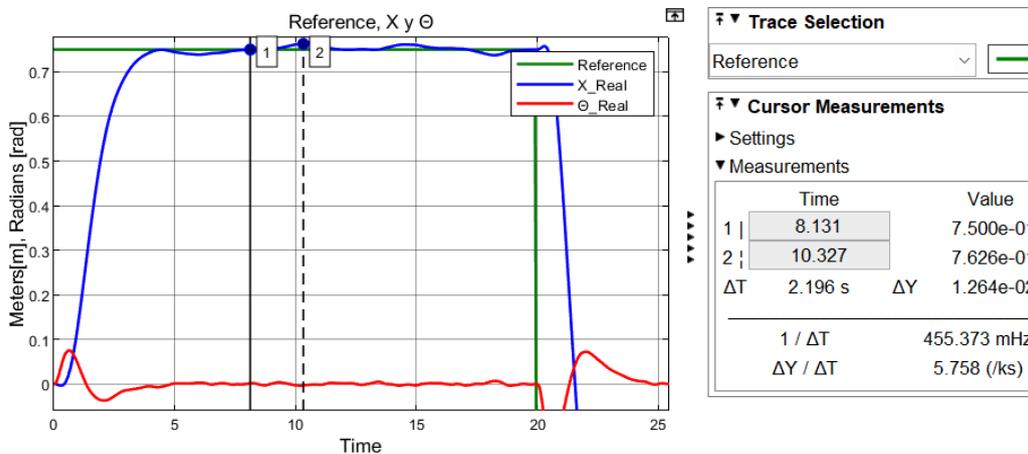


Figura 62. Gráfica para análisis comparativo del máximo sobreimpulso del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.

A partir de estos datos tomados de la figura 62 se tiene el siguiente valor de máximo sobreimpulso de la señal con respecto al 0,75 de la referencia.

$$M_p = \frac{0,7626 - 0,75}{0,75} = 0,0168$$

$$M_p = 1.68\%$$

Con lo cual se tiene un valor de 1,67 % de sobre elongación de la señal de salida.

4.2.1.3 Error de Estado Estacionario y Error Cuadrático Medio

Esta medida de discrepancia entre el valor desea o esperado y el real se procede a calcular directamente con la herramienta de simulación, empleando los bloques que este dispone para este propósito, lo cual nos da como resultado un valor de 0,007891 con respecto a la referencia (ver la figura 63) el que tiene un valor 0,75.

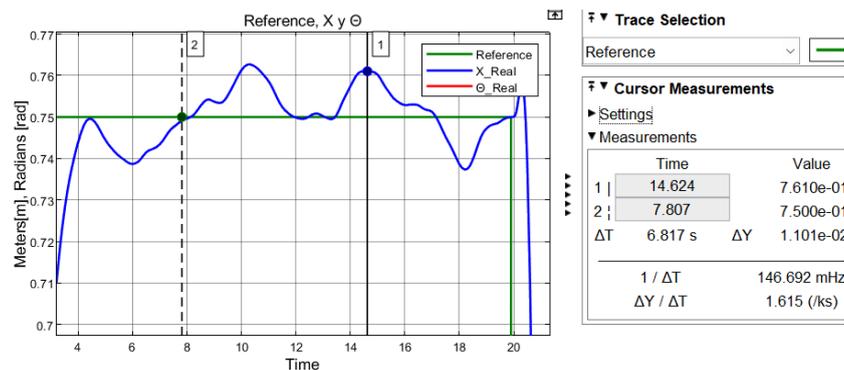


Figura 63. Gráfica para análisis comparativo del Error de Estado Estacionario del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE

En la figura 64 se muestra la desviación a lo largo del tiempo de funcionamiento del sistema correspondiente a la diferencia entre las señales de salida estimadas y reales. Como valor final de error se tiene 0,00001753.

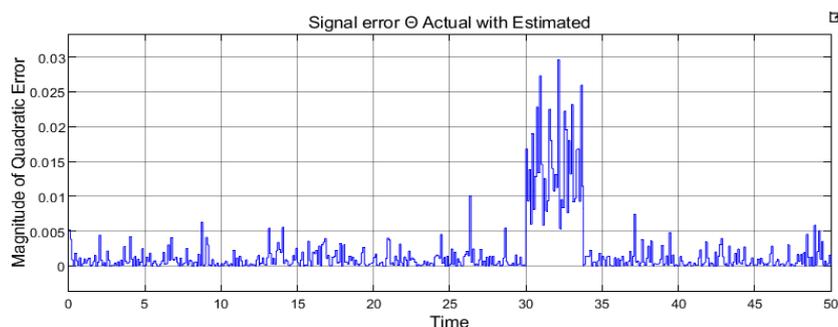


Figura 64. Gráfica para análisis comparativo del Error Cuadrático Medio del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE

4.2.1.4 Convergencia del Filtro Kalman

A continuación, se muestra de manera grafica la capacidad de estimación del filtro de Kalman frente a los ruidos presentes en la planta y los externos.

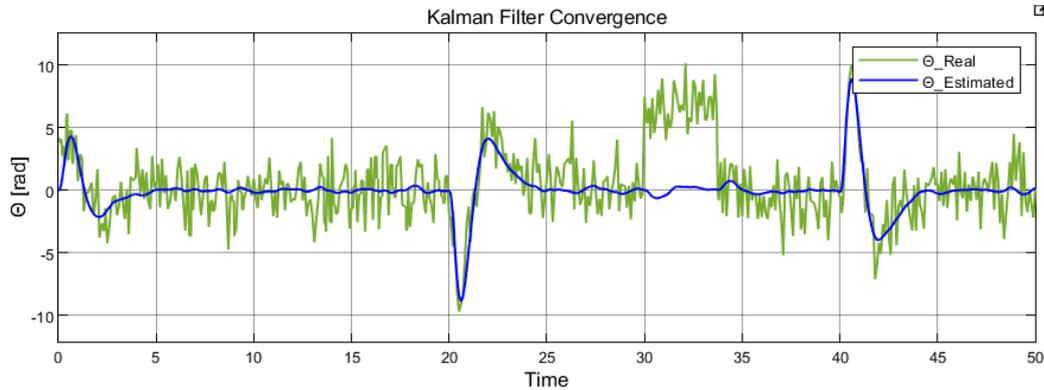


Figura 65. Gráfica para análisis comparativo de Convergencia del Filtro de Kalman del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.

Las señales de la figura 65 muestra la convergencia que presenta el filtro de Kalman, los ruidos y perturbaciones mitigan de manera eficiente, aun en presencia de alteraciones externas.

4.2.2 Condición Inicial 2: $\theta=30^\circ$; $x=0,85$.

Ahora se realizan las pruebas de rendimiento en valores de condición inicial de 30° y 0,85m en los estados θ y x respectivamente.

4.2.2.1 Tiempo de establecimiento

A continuación, en el próximo gráfico se presenta el lapso que la planta necesita para llegar en la referencia del sistema.

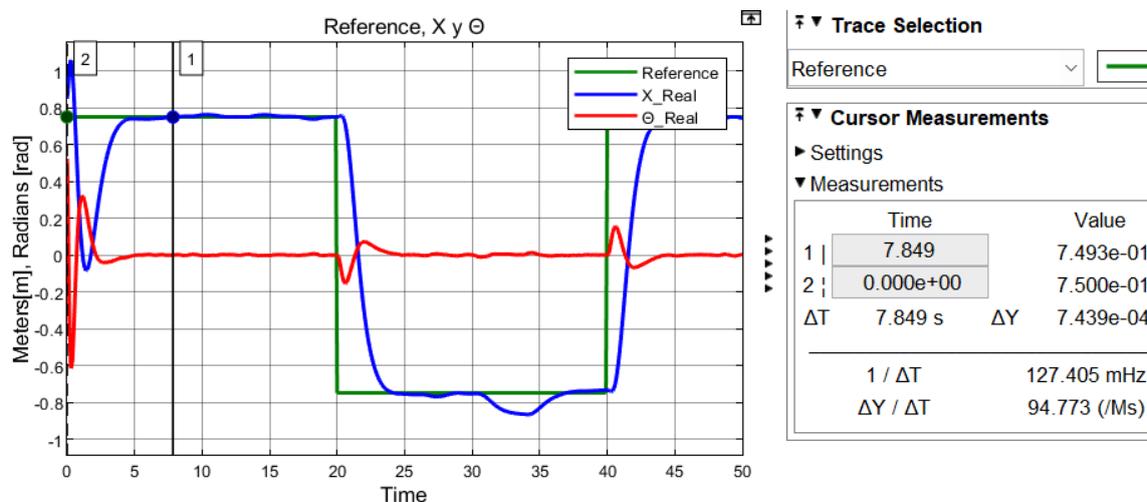


Figura 66. Gráfica para análisis comparativo del tiempo de establecimiento del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.

En la figura 66, se observa que en un periodo de 7.849 segundos alcanza la estabilización en la distancia deseada, siempre y cuando se conserve ese valor de referencia.

4.2.2.2 Cálculo de máximo sobreimpulso

Para determinar el porcentaje de sobre elongación de la señal en relación con la referencia, se emplea la función de medición disponible en el software de simulación numérica.

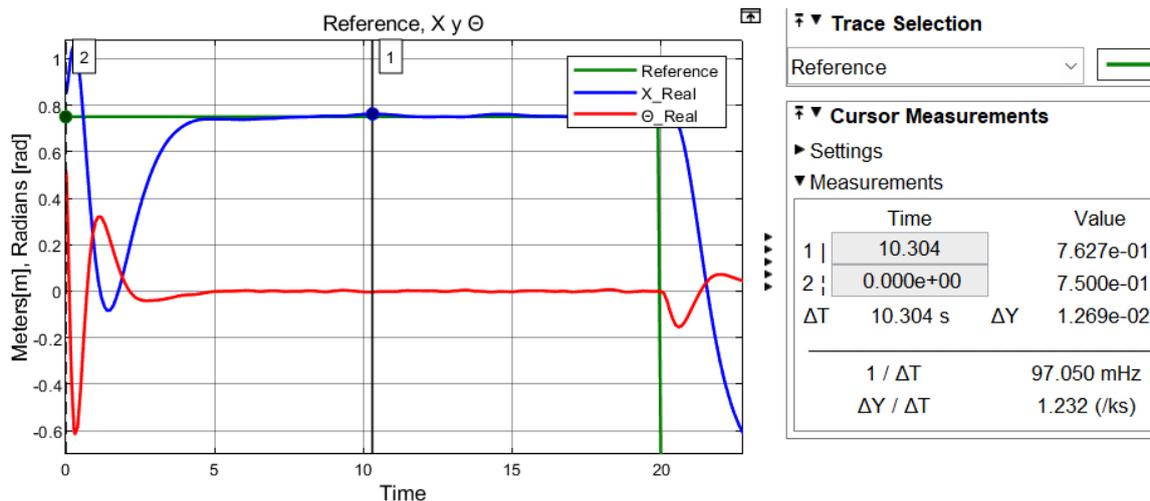


Figura 67. Gráfica para análisis comparativo del Máximo Sobreimpulso del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE

A partir de los datos obtenidos de la figura 67, se calcula el máximo sobreimpulso de la señal en relación con el 0,75 de la referencia de la siguiente manera:

$$M_P = \frac{0,7627 - 0,75}{0,75} = 0,01693$$

$$M_P = 1.693$$

Por lo tanto, se obtiene un valor de sobre elongación de la señal de salida del 1,69%.

4.2.2.1 Error de Estado Estacionario y Error Cuadrático Medio

En la figura 68 que se realiza en esta prueba de rendimiento, arroja un resultado de 0,007891 en comparación con el valor de referencia, donde el valor de este es 0,75.

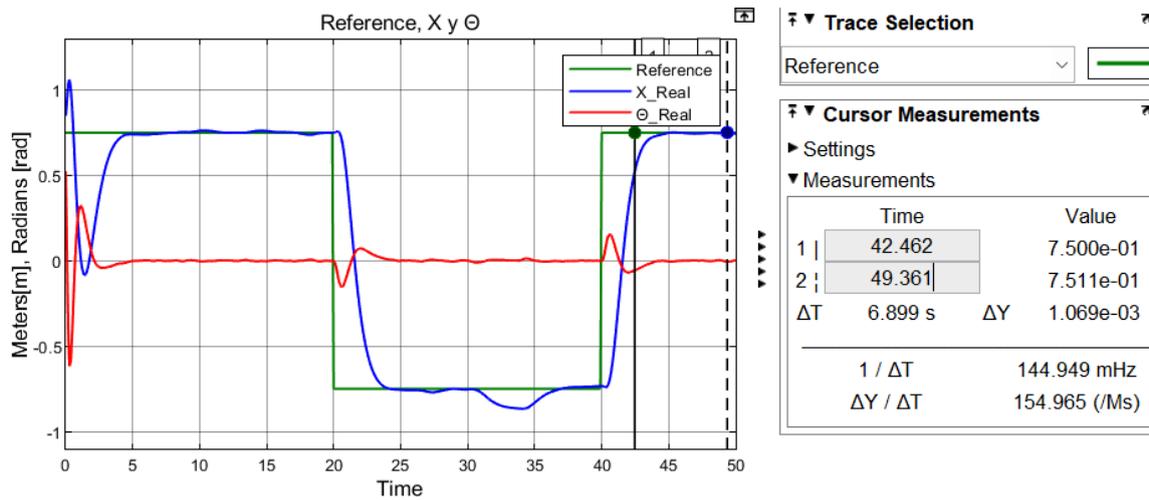


Figura 68. Gráfica para análisis comparativo del Error de Estado Estacionario del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE

Del mismo modo se tiene que el error cuadrático medio del sistema mientras se ejecuta el control a lo largo del tiempo, se puede observar cómo mantiene los mismos valores en comparación con las condiciones iniciales de las pruebas realizadas en la primera experimentación.

4.2.2.2 Convergencia del Filtro Kalman

Como en la experimentación anterior, en esta sección también se tienen las gráficas necesarias para la verificación de la convergencia del filtro de Kalman en el sistema desarrollado-

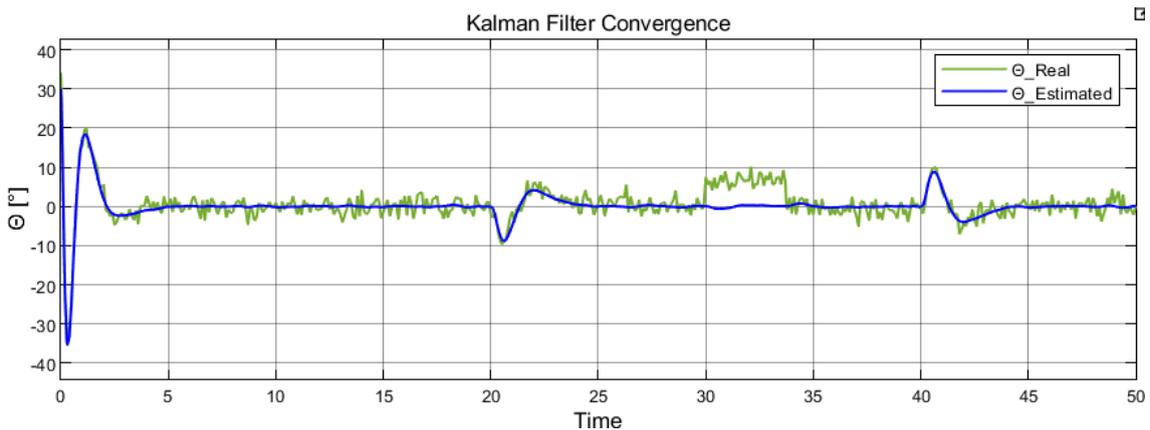


Figura 69. Gráfica para análisis comparativo del Convergencia del Filtro de Kalman del servocontrol mediante ubicación de polos con Filtro de Kalman LQE.

Las señales de ruido y filtrado presentado en la figura 69 dan un resultado convincente en cuanto la estimados de la señal estocástica para tener una más estable. A

lo largo de la simulación se puede apreciar como mitiga eficientemente las perturbaciones externas en la planta a excepción de picos de corta duración, pero de amplitud considerable.

4.3 Comparativa del servosistema de control con estimador y sin estimador lineal cuadrático

En esta sección se lleva a cabo las pruebas de rendimiento en el servocontrol sin el filtro de Kalman aplicado y los resultados del mismo sistema de control con el filtro estimador, resultados que se muestran en la Tabla 7.

Tabla 7. Parámetros evaluados en los sistemas sin filtro y con filtro de Kalman.

Especificaciones	Sistema sin LQE	Sistema con LQE
Máximo valor de sobreimpulso	7,73%	1,67%
Tiempo de establecimiento	$t_{ss}=4,002s$	$t_{ss}=4,482s$
Máximo valor de la señal de control	$u_{max}=5.387V$	$u_{max}=5.359V$
Mínimo valor de la señal de control	$u_{min}=-11,256V$	$u_{min}=-11.615V$
Máximo valor de ángulo de inclinación	$\theta_{max}=5.851^\circ$	$\theta_{max}=4.322^\circ$
Mínimo valor de ángulo de inclinación	$\theta_{min}=-9.694^\circ$	$\theta_{min}=-9.51^\circ$
Intervalo en el ángulo de inclinación	$-9.694^\circ \leq \theta(t) \leq 10^\circ$	$-9.51^\circ \leq \theta(t) \leq 8.89^\circ$

Los dos sistemas de control, tanto aquel el cual no se les aplica el filtro de Kalman y el servocontrol con el filtro estimador son comparados a continuación de manera gráfica, se superponen los dos pares de señales de salida que se tiene, ver figura 70.

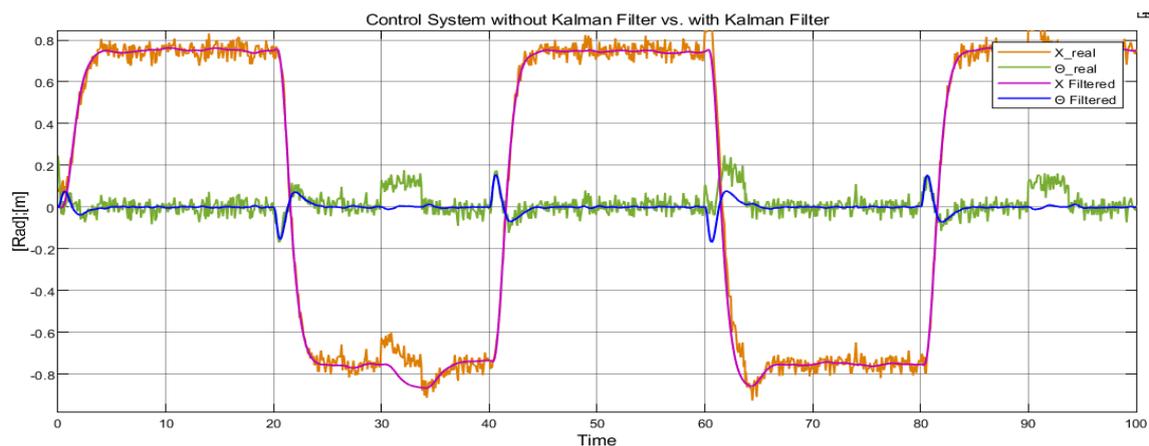


Figura 70. Señales del sistema de servocontrol por ubicación de polos con filtro de Kalman vs sin Filtro de Kalman

Las estimaciones que realiza el filtro de Kalman son óptimo con respecto a los ruidos y perturbaciones presentes en el sistema. En la figura 70 se puede apreciar como en los estados correspondientes son disipados sus ruidos de proceso y de medida dentro de la planta, el estado X manifiesta una mejora notable con respecto al sistema sin filtro el cual presenta notablemente oscilaciones que dificultan el seguimiento de la referencia, así mismo el estado Θ de los sistemas, está disminuido el ruido de este estado, en la Tabla 7 se tiene valores de características de evaluación cuantificables para comprobación del comportamiento del sistema con estimador y sin estimador.

Conclusiones

La investigación de los componentes electrónicos permitió comprender su funcionamiento, esencial para programar efectivamente y evitar fallos. El diagrama de conexión, creado con el software de simulación, facilitó la comprensión del diseño y previno problemas antes de la implementación real, minimizando errores y ahorrando tiempo y recursos. Esta herramienta también proporciona una referencia para futuras actualizaciones del sistema.

El análisis matemático de la planta balancín partiendo de las ecuaciones de Euler-Lagrange, el correspondiente desarrollo de fuerzas generalizadas y la correcta relación con la lógica numérica del motor llevó a obtener de manera racional y definitiva las ecuaciones diferenciales, con lo cual se concluye bajo un análisis tanto continuo como discreto que es un sistema no lineal e inestable.

El diseño del servocontrolador por ubicación de polos y aplicación del Estimador Lineal Cuadrático con seguimiento a la referencia, se llevó a cabo bajo un análisis de realimentación de estados y la ubicación de los polos complejos deseados permitiendo obtener las ganancias acertadas para el sistema de control. Con el análisis de estimador de Kalman conectado al servosistema de realimentación de estados permitió la estabilización del servocontrol sometido a ruidos y perturbaciones.

Al observar las matrices basadas en los parámetros del robot, se destaca un rendimiento más estable, caracterizado por un bajo porcentaje máximo de sobreimpulso (1.67%) y un tiempo de establecimiento de 4.482 segundos. Esto indica una respuesta más rápida y precisa en comparación con el sistema derivado de la matriz de identificación de la planta, que exhibe un porcentaje máximo de sobreimpulso significativamente más alto y una mayor variabilidad en la señal de control y el ángulo de inclinación.

Los servosistemas de control para el análisis comparativo se destacan en estas pruebas como muestra buen rendimiento en términos de tiempo de establecimiento (4.478 segundos), máximo valor de sobreimpulso (1.11%), y error cuadrático medio (0.002524). Además, a pesar de ser realizadas con presencia de condiciones iniciales y valores más bajos de ruido blanco gaussiano de proceso y medida, mitigan de manera satisfactoria estas inestabilidades presentes en el sistema y sobre este. Así, los resultados de las evaluaciones realizados muestran cierto nivel de estabilidad y precisión en la

simulación del servosistema de control, estos ensayos fueron sometidos a perturbaciones y ruidos gaussianos. No obstante, es fundamental considerar las condiciones específicas de cada prueba y las necesidades del sistema antes de tomar una decisión final sobre cuál es el enfoque más adecuado.

Dentro del análisis comparativo entre sistemas de control con y sin estimador lineal cuadrático (LQE) indica que el sistema con LQE mejora significativamente la estabilidad y precisión. Con un sobreimpulso máximo del 1.67% y un tiempo de establecimiento de 4.482 segundos, ofrece un mejor rendimiento en comparación con el sistema sin LQE. Estos resultados respaldan la eficacia del LQE para mejorar el rendimiento del sistema de control en diversas aplicaciones investigativas y robóticas.

El diseño de este tipo de controladores se puede emplear para varios tipos de sistemas o plantas ya sean MIMO o SISO teniendo en cuenta la optimización de algunas variables determinadas, en otras palabras, tener la opción del mejoramiento en la función de alguna característica de un sistema dado, y tiene su valía ya que también se tiene presente los ruidos externos e internos del sistema, si se lo complementa con el Filtro de Kalman.

Para el diseño del estimador lineal cuadrático se contempló utilizar el filtro de Kalman en el tiempo continuo o filtro de Kalman-Bucy, debido a que la evaluación del controlador se llevó a cabo mediante simulación, por consiguiente, no fue necesario elaborar el procedimiento discreto del filtro de Kalman, se empleó el filtro de Kalman-Bucy como estimador ideal de estados, puesto que reduce al mínimo la matriz de covarianza del fallo de estimación de estados.

La fase de embebido del algoritmo de control en la planta del microcontrolador ha sido esencial para llevar a cabo el balanceo del sistema. Los resultados experimentales indican que el sistema logró una mejora significativa en el tiempo de establecimiento (tss) y un menor error de seguimiento (err) en comparación con las condiciones iniciales.

Por último, la comunicación mediante Bluetooth ha sido crucial para recopilar datos generados por los sensores y evaluar el rendimiento del robot en tiempo real. Esta comunicación inalámbrica ha mejorado la versatilidad del sistema, como se evidencia en los resultados de las pruebas, donde se observa una concordancia satisfactoria entre los objetivos de diseño planteados y los resultados obtenidos.

Recomendaciones

El diseño de controladores automáticos puede parecer superficial en una perspectiva puramente teórica, ya que se omite la consideración de factores físicos que pueden tener un impacto sustancial en el sistema. Por ende, la elaboración de algoritmos de control requiere el acceso a equipos debidamente calibrados y especializados para evaluar la eficacia y viabilidad de un controlador.

A través de las pruebas llevadas a cabo con los controladores desarrollados en esta propuesta, resalta la eficacia del enfoque de control Estimador Lineal Cuadrático (LQE), que exhibe atributos que conducen a un desempeño superior en la ejecución del proceso. Por lo tanto, se sugiere considerar detenidamente la identificación de los recursos necesarios y los métodos para implementar este controlador en una variedad de contextos industriales o de investigación.

La utilización de software especializado para el diseño y la configuración de controladores es de importancia crítica. Frecuentemente, se emplean componentes externos que requieren extensiones computacionales para integrarse en el sistema. Para permitir la comunicación y operación precisa de los elementos físicos del sistema, es esencial que el software esté autorizado mediante una licencia válida, lo que otorga acceso pleno a todas sus herramientas y funcionalidades.

Utilizar un protocolo de comunicación eficiente y que asegure la correcta recolección de los datos en la planta, sin quitarle autonomía y funcionalidad a este sistema balancín. Ya que el protocolo de comunicación Bluetooth presentó problemas debido a lo susceptible a ruidos.

Bibliografías

- [1] S. Bennett, *A History of Control Engineering, 1930-1955*. IET, 1993.
- [2] «Minorsky_Paper.pdf». Accedido: 8 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: http://www.robotics.caltech.edu/wiki/images/1/15/Minorsky_Paper.pdf
- [3] M. Araki y H. Unbehauen, «PID control; Control systems, robotics, and Automation», *Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS)*, vol. 2, 2009.
- [4] «Controladores PID: teoría, diseño y ajuste | Investigación CiNii». Accedido: 8 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1570854174462638720>
- [5] H. Bansal, R. Sharma, y S. Ponpathirkootam, «PID Controller Tuning Techniques: A Review», vol. 2, pp. 168-176, nov. 2012.
- [6] J. W. Tukey, «Review of The Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications.», *Journal of the American Statistical Association*, vol. 47, n.º 258, pp. 319-321, 1952, doi: 10.2307/2280758.
- [7] K. C. Shet y B. V. Rao, «Linear Time-Varying Optimal Filtering», *IETE Technical Review*, vol. 3, n.º 12, pp. 597-605, dic. 1986, doi: 10.1080/02564602.1986.11438045.
- [8] M. B.r. y S. M.r., «ECG Denoising Using Wiener Filter and Kalman Filter», *Procedia Computer Science*, vol. 171, pp. 273-281, ene. 2020, doi: 10.1016/j.procs.2020.04.029.
- [9] R. E. Kalman, «A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems», *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, n.º 1, pp. 35-45, mar. 1960, doi: 10.1115/1.3662552.
- [10] T. A. Nguyen, «Control an Active Suspension System by Using PID and LQR Controller», *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development*, vol. 10, pp. 7003-7012, ene. 2020, doi: 10.24247/ijmperdjun2020662.
- [11] G. Welch, «An Introduction to the Kalman Filter», 1997.
- [12] T. Takei, R. Imamura, y S. Yuta, «Baggage Transportation and Navigation by a Wheeled Inverted Pendulum Mobile Robot», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 56, n.º 10, pp. 3985-3994, oct. 2009, doi: 10.1109/TIE.2009.2027252.
- [13] F. Auger, M. Hilaret, J. M. Guerrero, E. Monmasson, T. Orłowska-Kowalska, y S. Katsura, «Industrial Applications of the Kalman Filter: A Review», *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 60, n.º 12, pp. 5458-5471, dic. 2013, doi: 10.1109/TIE.2012.2236994.
- [14] K. Ma, J. Kong, Y. Wang, y X.-M. Lu, «Review of the Applications of Kalman Filtering in Quantum Systems», *Symmetry*, vol. 14, n.º 12, Art. n.º 12, dic. 2022, doi: 10.3390/sym14122478.
- [15] J. A. Intriago Torres y F. L. Rodríguez Gallegos, «Balancín de dos ruedas con controlador Pololu», bachelorThesis, Espol, 2018. Accedido: 10 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/45467>
- [16] C. Dehong, G. Qichen, X. Peng, L. Huadong, Z. Hao, y T. Kai, «The research about self-balancing mobile platform based on differential wheel», en *2017 29th Chinese Control*

- And Decision Conference (CCDC)*, Chongqing, China: IEEE, may 2017, pp. 6072-6077. doi: 10.1109/CCDC.2017.7978261.
- [17] Y. Ding, J. Gafford, y M. Kunio, «Modeling, Simulation and Fabrication of a Balancing Robot».
- [18] S. J. Pincin, «Diseño, construcción y control de un robot balancín.», *piIngenieriaMecanica*, Universidad Nacional de Cuyo, 2016. Accedido: 30 de enero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://ricabib.cab.cnea.gov.ar/557/>
- [19] V. D. Caiza García y C. E. Verdezoto Cedeño, «Implementación de dos robots autónomos y uno controlado mediante tecnología bluetooth para las categorías seguidor de línea con obstáculos, laberinto y balancín.», sep. 2016, Accedido: 12 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://repositorio.ucsg.edu.ec/handle/3317/6607>
- [20] A. P. A. Sanchez, «Diseño e implementación de controlador PID para un balancín de dos grados de libertad».
- [21] K. L. Jácome Barahona, «Análisis de la ejecución presupuestaria de los proyectos de investigación científica y su impacto financiero en el cumplimiento del plan de desarrollo institucional de la Universidad Central del Ecuador en el periodo 2015 – 2020», *masterThesis*, Quito : UCE, 2022. Accedido: 9 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/28011>
- [22] D. L. R. Mejillón y N. Gabriel, «Diseño e implementación de un control de lógica difusa para la cámara frigorífica de una planta prototipo de refrigeración para comparación con un controlador PID.», *bachelorThesis*, La Libertad: Universidad Estatal Península de Santa Elena, 2019., 2019. Accedido: 9 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/4796>
- [23] V. Klemm *et al.*, «Ascento: A Two-Wheeled Jumping Robot», en *2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, may 2019, pp. 7515-7521. doi: 10.1109/ICRA.2019.8793792.
- [24] G. Oliver Peiró, «Diseño de un Prototipo del Robot Handle" de Boston Dynamics con Recurdyn y Mathematica."», 2018.
- [25] L. J. Pinto, D.-H. Kim, J. Y. Lee, y C.-S. Han, «Development of a Segway robot for an intelligent transport system», en *2012 IEEE/SICE International Symposium on System Integration (SII)*, dic. 2012, pp. 710-715. doi: 10.1109/SII.2012.6427308.
- [26] Q. K. Ho y C. B. Pham, «Study on Inertia Wheel Pendulum Applied to Self-Balancing Electric Motorcycle», en *2018 4th International Conference on Green Technology and Sustainable Development (GTSD)*, nov. 2018, pp. 687-692. doi: 10.1109/GTSD.2018.8595698.
- [27] A. P. A. Sanchez, «Diseño e implementación de controlador PID para un balancín de dos grados de libertad».

- [28] J. A. I. Torres y F. L. R. Gallegos, «INGENIERO EN ELECTRICIDAD ESPECIALIZACIÓN ELECTRÓNICA Y AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES».
- [29] «Importancia del uso del sistema scada para el desarrollo empresarial». Accedido: 29 de abril de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://1library.co/document/yd2987jq-importancia-uso-sistema-scada-desarrollo-empresarial.html>
- [30] «Modern Control Engineering 5th edition (9780136156734)». Accedido: 2 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.textbooks.com/Modern-Control-Engineering-5th-Edition/9780136156734/Katsuhiko-Ogata.php>
- [31] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, y S. H. Nawab, *Signals & Systems*. Prentice-Hall International, 1997.
- [32] «Time Variant and Time Invariant System | Difference and Information - Electronics Projects». Accedido: 19 de noviembre de 2023. [En línea]. Disponible en: https://electronicsprojects.in/signals_and_systems/time-variant-and-time-invariant-system-difference-and-information/
- [33] R. C. Dorf y R. H. Bishop, *Modern control systems*, Thirteenth edition. Hoboken: Pearson, 2016.
- [34] B. X. González Macías y A. D. Bautista España, «Diseño e implementación del algoritmo de control para un robot balance, usando fuzzy logic en la plataforma de national instruments.», bachelorThesis, 2018. Accedido: 16 de junio de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://dspace.ups.edu.ec/handle/123456789/16009>
- [35] A. Jiménez, F. Jiménez, y I. Ruge, «Modeling and Control of a Two Wheeled Self-Balancing Robot: a didactic platform for control engineering education.», en *Proceedings of the 18th LACCEI International Multi-Conference for Engineering, Education, and Technology: Engineering, Integration, And Alliances for A Sustainable Development* "Hemispheric Cooperation for Competitiveness and Prosperity on A Knowledge-Based Economy", Latin American and Caribbean Consortium of Engineering Institutions, 2020. doi: 10.18687/LACCEI2020.1.1.556.
- [36] I. Virgala y F. Filakovský, «ALGORITHM OF EULER-LAGRANGE METHOD FOR DESIGNING OF DYNAMIC MODEL», *Технічні науки та технології*, n.º 3(13), Art. n.º 3(13), 2018, doi: 10.25140/2411-5363-2018-3(13)-89-95.
- [37] X. Bin, G. Lei, W. Shimin, S. Yuan, y Z. Ying, «Dynamics modeling and system parameter identification experiment of a kind of two-wheeled robot», en *2015 IEEE International Conference on Information and Automation*, ago. 2015, pp. 404-408. doi: 10.1109/ICInfA.2015.7279321.
- [38] M. Tayefi y Z. Geng, «A constructive self-balancing controlled Lagrangian for wheeled inverted pendulum», en *2016 Chinese Control and Decision Conference (CCDC)*, Yinchuan, China: IEEE, may 2016, pp. 1776-1781. doi: 10.1109/CCDC.2016.7531269.

- [39] P. Strakos y J. Tuma, «Mathematical modelling and controller design of inverted pendulum», en *2017 18th International Carpathian Control Conference (ICCC)*, Sinaia, Romania: IEEE, may 2017, pp. 388-393. doi: 10.1109/CarpathianCC.2017.7970431.
- [40] D. K. Ampountolas, «Nikolaos Marios Patsouras», 2022.
- [41] A. J. Cribas, L. E. Martínez, y A. M. Carrasco, «Sistema de Control de Llenado y Nivel de Tanques en Plantas de Tratamiento de Agua».
- [42] E. A. Braschi, «Enfoque práctico de control moderno».
- [43] M. Leahy, «ELEGOO: Tumbler Self-Balancing Robot Car on Solidworks», Medium. Accedido: 4 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://mileahy.medium.com/elegoo-tumbler-self-balancing-robot-car-on-solidworks-aef239dcca7f>
- [44] H. J. Rosas Ramos, «Diseño y análisis comparativo de un sistema de péndulo invertido aplicando tecnicas de control lineal cuadrático Gaussiano», *Universidad Católica de Santa María*, sep. 2022, Accedido: 20 de noviembre de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://renati.sunedu.gob.pe/handle/sunedu/3363578>
- [45] T. Räsänen y V.-P. Pyrhönen, «State feedback control of a rotary inverted pendulum», 2019.
- [46] R. L. Williams y D. A. Lawrence, *Linear State-Space Control Systems*, 1.^a ed. Wiley, 2007. doi: 10.1002/9780470117873.
- [47] G. Scarpin, *Implementación de los Modelos de Ráfagas Continuas*. 2024.
- [48] L. E. Artieda Cruz y D. Paillacho Chiluzza, «Implementación mediante FPGA, de un filtro de Kalman para reducir el efecto del ruido en sensores de temperatura», Thesis, ESPOL. FIEC., 2021. Accedido: 17 de febrero de 2024. [En línea]. Disponible en: <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/56407>
- [49] C. Urrea y R. Agramonte, «Kalman Filter: Historical Overview and Review of Its Use in Robotics 60 Years after Its Creation», *Journal of Sensors*, vol. 2021, p. e9674015, sep. 2021, doi: 10.1155/2021/9674015.
- [50] G. M. Andaluz Ortiz, «Modelación, Identificación y Control de Robots Móviles», bachelorThesis, QUITO/EPN/2011, 2011. Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://bibdigital.epn.edu.ec/handle/15000/4321>
- [51] «Microcontrolador - qué es y para que sirve», HeTPro-Tutoriales. Accedido: 20 de noviembre de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://hetpro-store.com/TUTORIALES/microcontrolador/>
- [52] «TB6612FNG Dual Motor Driver Module», ARDUSHOP. Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://ardushop.ro/en/home/990-tb6612fng-dual-motor-driver-module.html>

- [53] «Mailbag !! MPU6050 Module I2C Driver, Init and config». Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://esp8266-projects.org/2015/12/mailbag-mpu6050-module-i2c-driver-init-html/>
- [54] «Amazon.com: Motor de engranajes CC GB37-520 con reducción de velocidad eléctrica de 12 V y 12 rpm : Herramientas y Mejoras del Hogar». Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.amazon.com/Electric-Reduction-Geared-Self%E2%80%91Locking-GB37-520/dp/B09DGJ53S1>
- [55] «MODULO BLUETOOTH HC-05», MACTRONICA. Accedido: 8 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.mactronica.com.co/modulo-bluetooth-hc-05>
- [56] «Software de simulación de circuitos con SPICE». Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.labcenter.com/simulation/>
- [57] «MATLAB - El lenguaje del cálculo técnico». Accedido: 5 de mayo de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://la.mathworks.com/products/matlab.html>
- [58] jecrespom, «IDE Arduino», Aprendiendo Arduino. Accedido: 9 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://aprendiendoarduino.wordpress.com/2016/12/11/ide-arduino/>
- [59] S. Eshkabilov, «Simulink Modeling Essentials», en *Beginning MATLAB and Simulink: From Novice to Professional*, S. Eshkabilov, Ed., Berkeley, CA: Apress, 2019, pp. 275-342. doi: 10.1007/978-1-4842-5061-7_5.
- [60] M. M. Scheunemann, «Autonomous and Intrinsically Motivated Robots for Sustained Human-Robot Interaction», 2021.
- [61] C. Iwendi, M. A. Alqarni, J. H. Anajemba, A. S. Alfakeeh, Z. Zhang, y A. K. Bashir, «Robust Navigational Control of a Two-Wheeled Self-Balancing Robot in a Sensed Environment», *IEEE Access*, vol. 7, pp. 82337-82348, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2923916.
- [62] R. Ali, F. M. Malik, M. Liaqat, y M. Shah, «Ball and Beam Tracking Application with Linear Quadratic Control Design», en *2019 8th International Conference on Systems and Control (ICSC)*, oct. 2019, pp. 153-157. doi: 10.1109/ICSC47195.2019.8950644.
- [63] «ELEGOO Tumbler Self-Balancing Robot Car V1.1/V1.0 Tutorial», ELEGOO Official. Accedido: 3 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://www.elegoo.com/blogs/arduino-projects/elegoo-tumbler-self-balancing-robot-car-tutorial>
- [64] A. Ribas Mari, «Diseño y construcción de un robot equilibrista para la implementación de controladores en el entorno Matlab/Simulink con fines didácticos», Bachelor thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2023. Accedido: 3 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://upcommons.upc.edu/handle/2117/390638>
- [65] «Motor DC JGA25-370 - 12V/100RPM con encoder», Naylamp Mechatronics - Perú. Accedido: 3 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en:

<https://naylampmechatronics.com/motores-dc/797-motor-dc-jga25-370-12v100rpm-con-encoder.html>

[66] «Arduino UNO | Arduino.cl - Compra tu Arduino en Línea». Accedido: 9 de agosto de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://arduino.cl/arduino-uno/>

Anexos

○ Anexo 1: Elaboración de las ecuaciones que describen el movimiento.

Se puede derivar las ecuaciones de movimiento del péndulo invertido de dos ruedas mediante el método de Lagrange basado en el sistema de coordenadas en la figura previa. Si la dirección de péndulo invertido de dos ruedas es positiva en el eje-X en t=0, cada coordenada es dado por los siguientes:

$$(x, y) = (x_m, y_m) = \left(\int \dot{x}_m dt, r \right), (\dot{x}_m, \dot{y}_m) = (r\dot{\phi}, r)$$

$$(x_d, y_d) = (x_m, y_m)$$

$$(x_b, y_b) = (x_m + l\sin\theta, y_m + l\cos\theta)$$

$$E_{c1} = \frac{1}{2} m_r \cdot ((\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2))$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} \frac{J_p}{r^2} \cdot \dot{x}^2 = \frac{1}{2} J_p \cdot \dot{\theta}^2$$

$$E_{c3} = \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2)$$

$$E_{c4} = \frac{1}{2} J_r \dot{\phi}_r^2 = \frac{1}{2} \frac{J_r}{r^2} \cdot \dot{x}_r^2$$

Energía potencial viene dada por:

$$E_p = m_p g y_b$$

$$T1 = E_{c1} + E_{c3} = \frac{1}{2} m_r \cdot ((\dot{x}_r^2 + \dot{y}_r^2)) + \frac{1}{2} m_p (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2)$$

$$T2 = E_{c2} + E_{c4} + E_{cm} = \frac{1}{2} J_p \cdot \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \frac{J_r}{r^2} \cdot \dot{x}_r^2$$

$$U = E_p = m_p g y_b = m_p g (r + l\cos\theta)$$

○ Anexo 2: Ecuaciones de Lagrange

La L de Lagrange tiene la siguiente expresión: L=T1+T2-U, así:

$$L = \dot{x}^2 \left(\frac{1}{2} m_r + \frac{1}{2} m_p + \frac{1}{2} \frac{J_r}{r^2} \right) + \dot{\theta}^2 \left(\frac{1}{2} m_p l^2 + \frac{1}{2} J_p \right) + m_p \dot{x} \dot{\theta} l \cos\theta - m_p g l \cos\theta + r^2 m_r - m_p g r$$

Las variables de estado, entrada y salidas, estas son:

$$[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4] = [x \ \dot{x} \ \theta \ \dot{\theta}]$$

$$[u_1] = [v]$$

$$[y_1 \ y_2] = [x_1 \ x_3]$$

○ **Anexo 3: Ecuaciones de Euler-Lagrange**

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \sum Q_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = F_x$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = F_\theta$$

$$\left(m_r + m_p + \frac{J_r}{r^2} \right) \ddot{x} + m_p \ddot{\theta} \cos \theta = F_x$$

$$m_p \ddot{x} \cos \theta + (m_p l^2 + J_p) \ddot{\theta} + m_p g \sin \theta - (m_p l \dot{x} \dot{\theta} (\sin \theta)) = F_\theta$$

Análisis de la dinámica del motor

$$L_m \dot{i}_{i,d} = v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right) - R i_{i,d}$$

$$\dot{i}_{i,d} = \frac{v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)}{R}$$

De la ecuación de torque despeja $i_{i,d} = \frac{\tau_m(t)}{nk_t}$, se procede a igualar, $v_{i,d} = k_s u$

$$\frac{\tau_m(t)}{nk_t} = \frac{v_{i,d} - K_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)}{R}$$

$$\frac{\tau_m(t)}{nk_t} = \frac{v_{i,d}}{R} - \frac{K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$\tau_m(t) = \frac{nk_t v_{i,d}}{R} - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$\tau_m(t) = \frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

Fuerzas generalizadas

Trabajo en el torque del motor:

$$W = F \cdot d \rightarrow W_{\tau_m} = \tau_{mi,d} \left(\frac{x_{i,d}}{r} - \theta \right) \rightarrow \frac{\partial W_{\tau_m}}{\partial x} = \frac{\tau_{mi,d}}{r}$$

$$\frac{\partial W_{\tau_m}}{\partial \theta} = -\tau_{mi,d}$$

Trabajo de la fuerza de fricción con el suelo

$$W = F \cdot d \rightarrow W_{Fv} = -u_s \dot{x}_{i,d} \cdot x_{i,d} \rightarrow \frac{\partial W_{Ff}}{\partial x} = -u_s \dot{x}_{i,d}$$

$$\frac{\partial W_{Ff}}{\partial \theta} = 0$$

Trabajo de la fuerza viscosa:

$$W = F \cdot d \rightarrow W_{Fv} = F_v(\varphi_{i,d} - \theta) = -u_e(\dot{\varphi}_{i,d} - \dot{\theta}) \left(\frac{x_{i,d}}{r} - \theta \right)$$

$$W = -u_e \dot{\varphi}_{i,d} \frac{x_{i,d}}{r} + u_e \dot{\theta} \frac{x_{i,d}}{r} + u_e \dot{\varphi}_{i,d} \theta - u_e \dot{\theta} \theta$$

$$\frac{\partial W_{Fv}}{\partial x} = -\frac{u_e}{r} (\dot{\varphi}_{i,d} - \dot{\theta})$$

$$\rightarrow \frac{\partial W_{tm}}{\partial \theta} = u_e (\dot{\varphi}_{i,d} - \dot{\theta})$$

Por lo tanto, las fuerzas aplicadas quedan como de la siguiente manera:

$$F_x = \frac{\tau_{mi,d}}{r} - u_s \dot{x}_{i,d} - \frac{u_e}{r} (\dot{\varphi}_{i,d} - \dot{\theta}) = \frac{\left(\frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right) \right)}{r} - u_s \dot{x} - \frac{u_e}{r} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= \frac{nk_t k_s}{Rr} u + \frac{nk_t K_e}{Rr} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) - u_s \dot{x} - \frac{u_e}{r} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= \frac{nk_t k_s}{Rr} u + \frac{nk_t K_e}{Rr} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) - w u_s \dot{x} - \frac{u_e}{r} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= \frac{nk_t k_s}{Rr} u + \frac{nk_t K_e}{Rr} \dot{\theta} - \frac{nk_t K_e}{Rr^2} \dot{x} - u_s \dot{x} + \frac{u_e}{r} \dot{\theta} - \frac{\dot{x} u_e}{r r}$$

$$F_x = \frac{nk_t k_s}{Rr} u + \left(\frac{nk_t K_e}{Rr} + \frac{u_e}{r} \right) \dot{\theta} - \dot{x} \left(\frac{nk_t K_e}{Rr^2} + \frac{u_e}{r^2} + u_s \right)$$

$$F_\theta = -\tau_{mi,d} + u_e (\dot{\varphi}_{i,d} - \dot{\theta}) = - \left(\frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\frac{\dot{x}}{r} - \dot{\theta} \right) \right) + u_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= -\frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) + u_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= -\frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \left(\dot{\theta} - \frac{\dot{x}}{r} \right) + u_e \left(\frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - \dot{\theta} \right)$$

$$= -\frac{nk_t k_s}{R} u - \frac{nk_t K_e}{R} \dot{\theta} + \frac{\dot{x} nk_t K_e}{r R} + u_e \frac{\dot{x}_{i,d}}{r} - u_e \dot{\theta}$$

$$F_\theta = -\frac{nk_t k_s}{R} u - \dot{\theta} \left(\frac{nk_t K_e}{R} + u_e \right) + \dot{x} \left(\frac{nk_t K_e}{Rr} + \frac{u_e}{r} \right)$$

○ **Anexo 4: Datos Técnicos del Motor DC GA37-520**

Tabla 8. Datos Técnicos del Motor DC GA37-520

Información Técnica

Tensión Nominal	12 V DC
Rango de voltaje de operación	1.0V ~ 16.0V DC
Relación de Reducción	1:30
Peso	0,150 kg
Corriente sin carga	≤200 mA
Velocidad sin carga	360rpm ± 10%
Ruido eléctrico, Motor equipado con Varistor	Si
Encoder, Doble interruptor Hall	26 Pulse de Salida

○ **Anexo 5: Datos técnicos del Arduino Uno**

Tabla 9. Datos técnicos de la tarjeta Arduino uno R3

INFORMACIÓN TÉCNICA	
Característica	Valor
Microcontrolador	ATmega328P
Voltaje de Operación	5V
Voltaje de Entrada (Recomendado)	7-12V
Voltaje de Entrada (Límite)	6-20V
Pines Digitales I/O	14 (6 proporcionan PWM)
Pines Analógicos I/O	6
Corriente Máxima por Pin	40 mA
Corriente Máxima en 3,3V Pin	50 mA
Memoria Flash	32 KB (0.5 KB usado por bootloader)
SRAM	2 KB
EEPROM	1 KB
Velocidad del Reloj	16 MHz
Dimensiones	68,6 × 53,4 mm

Tabla 10. Datos técnicos del Arduino Uno

○ Anexo 6: Datos Técnicos del Driver TB6612FNG

Tabla 11. Datos técnicos del controlador TB6612FNG

INFORMACIÓN TÉCNICA						
Características	Símbolo	Min.	Tip.	Max.	Unidad	Observaciones
Voltaje de suministro	VCC	2,7	3	5,5	V	
Voltaje Máximo	VM	2,5	5	13,5	V	1,0 VM ≥ 4,5 V
Corriente de Salida (H-SW)	IOUT	-	-	0,4	A	4,5 V > VM ≥ 2,5 V
Frecuencia de Conmutación	fPWM	-	-	100	kHz	Sin Operación
Resistencia ON Baja (Ahorro de Energía)	RON	-	-	0,5	Ω	Superior + Inferior, VM ≥ 5 V
Sistema de Espera (Ahorro de Energía)	-	-	-	-	-	
Modos de Función CW/CCW/Freno Corto/Detener	-	-	-	-	-	
Circuito de Protección Térmica Incorporado y Circuito de Detección de Baja Tensión	-	-	-	-	-	
Paquete de Cara Pequeña (SSOP24: Espaciado entre Pines de 0,65 mm)	-	-	-	-	-	
Empaque libre de plomo	-	-	-	-	-	

Tabla 12. Datos Técnicos del Driver TB6612FNG

○ Anexo 7: Datos Técnicos del Sensor MPU-6050

Tabla 13. Datos técnicos del Sensor MPU-6050

INFORMACION TÉCNICO					
Parámetro	Condiciones	Mín.	Típ.	Máx.	Unidad
Sensor de Temperatura	Rango	-40		+85	°C
Sensibilidad	Sin ajuste		340		LSB/°c

Desplazamiento de Temperatura	35°C		-521		LSB
Linealidad	Ajuste lineal mejor (de -40°C a +85°C)			±1	°C
VDD Suministro de energía	Voltajes de Operación	2.375	3.46		V
Voltaje de Referencia VLOGIC	Solo MPU-6050	1,71	1,8	1,89	V
Corriente de Operación Normal	Giroscopio + Acelerómetro		3,9		mA
	Giroscopio + Acelerómetro (DMP deshabilitado)		3,8		mA
	Solo Giroscopio (DMP y Acelerómetro deshabilitados)		3,6		mA
	Solo Acelerómetro (DMP y Giroscopio deshabilitados)		500		µA
Corriente de Modo Bajo Consumo	Tasa de actualización de 1,25 Hz		10		µA
	Tasa de actualización de 5 Hz		20		µA
	Tasa de actualización de 20 Hz		70		µA
	Tasa de actualización de 40 Hz		140		µA
Voltaje de Referencia VLOGIC	Solo MPU-6050, este valor de ser ≤ VDD en todo momento	-	-	-	-
Interfaz Serie	Frecuencia de operación SPI, Todos los registros Lectura/Escritura	-	100	±10%	MHz

Tabla 14. Datos Técnicos del Sensor MPU-6050

○ Anexo 8: Datos Técnicos de Modulo Bluetooth HC-05

Tabla 15. Datos técnicos del Módulo Bluetooth HC-05	
INFORMACIÓN TÉCNICA	
Características	Valor
Protocolo Bluetooth	Bluetooth v2.0 + EDR
Frecuencia de Operación.	2,4 GHz
Alcance máximo	Aproximadamente 10 metros
Modos de Operación	Maestro y Esclavo
Perfil Soportado	SPP (Serial Port Profile)
Voltaje de Operación	3,3V – 5V
Consumo de Corriente	30 mA (Conexión Activa)
	1 mA (Modo de Espera)
Interfaz de Conmutación	UART (TTL)
Tasa de Transmisión UART	Ajustable (Hasta 1382400 bps)
Nivel Lógico UART	3,3 V
	5 V (Tolerante)
Dimensiones	Aproximadamente 28 × 15 mm
Antena	Antena incorporada

Tabla 16. Datos Técnicos de Modulo Bluetooth HC-05

○ **Anexo 9: Aplicación System Identification**

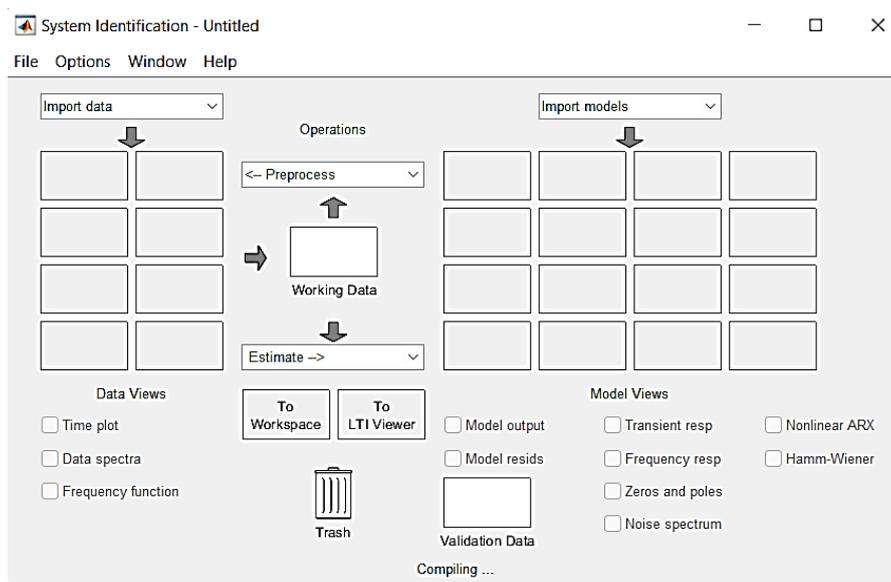


Figura 71. Aplicación de Matlab System Identification



Tesis Final000

5%
Textos sospechosos



3% Similitudes
< 1% similitudes entre comillas
< 1% entre las fuentes mencionadas
2% Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: Tesis Final000.pdf
ID del documento: 547838be8ea573a24e357c1ed6a3f8825da48fbc
Tamaño del documento original: 3,18 MB

Depositante: CARLOS ALBERTO SALDAÑA ENDERICA
Fecha de depósito: 8/6/2024
Tipo de carga: interface
fecha de fin de análisis: 8/6/2024

Número de palabras: 36.311
Número de caracteres: 239.148

Ubicación de las similitudes en el documento:



Fuentes principales detectadas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	repositorio.ucsm.edu.pe https://repositorio.ucsm.edu.pe/bitstream/20.500.12920/12050/5/74.0218.IE.pdf 7 fuentes similares	2%		Palabras idénticas: 2% (908 palabras)
2	Tesis_Pillasagua Lídice.pdf Tesis_Pillasagua Lídice #b5c7bd El documento proviene de mi biblioteca de referencias 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (247 palabras)
3	cris.continental.edu.pe Elizabeth Cecilia Ore Nuñez — Universidad Continental https://cris.continental.edu.pe/es/persons/elizabeth-cecilia-ore-nuñez 1 fuente similar	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (35 palabras)
4	Documento de otro usuario #93235f El documento proviene de otro grupo	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (27 palabras)
5	html.rincondelvago.com Encuentra aquí información de Sistemas de control en ... https://html.rincondelvago.com/sistemas-de-control-en-el-espacio-de-estados.html	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (33 palabras)

Fuentes con similitudes fortuitas

Nº	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	www.doi.org https://www.doi.org/10.1109/IEMCON.2018.8614858	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (31 palabras)
2	bibdigital.epn.edu.ec https://bibdigital.epn.edu.ec/bitstream/15000/11569/3/T1695.pdf.txt	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (33 palabras)
3	repositorioinstitucional.uabc.mx https://repositorioinstitucional.uabc.mx/bitstream/20.500.12930/4984/1/PAL017437.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (32 palabras)
4	www.dspace.uce.edu.ec Análisis de la ejecución presupuestaria de los proyectos... http://www.dspace.uce.edu.ec/handle/25000/28011	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (25 palabras)
5	1library.co Diseño, construcción y control de un robot balancín. https://1library.co/document/q508opwz-diseno-construccion-y-control-de-un-robot-balancin.html	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (22 palabras)

Fuentes mencionadas (sin similitudes detectadas)

Estas fuentes han sido citadas en el documento sin encontrar similitudes.

- http://www.robotics.caltech.edu/wiki/images/1/15/Minorsky_Paper.pdf
- <https://cir.nii.ac.jp/crid/1570854174462638720>
- <http://www.dspace.espol.edu.ec/handle/123456789/45467>
- <https://ricabib.cab.cnea.gov.ar/557/>
- <https://1library.co/document/yd2987jq>