



**UNIVERSIDAD ESTATAL PENÍNSULA DE SANTA ELENA**

**FACULTAD DE SISTEMAS Y TELECOMUNICACIONES**

**CARRERA DE ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**TRABAJO DE TITULACIÓN**

Propuesta tecnológica, previo a la obtención del Título de:

**INGENIERO EN ELECTRÓNICA Y TELECOMUNICACIONES**

**“DISEÑO Y SIMULACIÓN DE UN CONTROL PID DE ORDEN FRACCIONAL PARA UN  
ROBOT DE ENLACE ÚNICO CON FLEXIBILIDAD”**

**AUTOR**

**LUIS ALBERTO PANCHANA PARRA**

**TUTOR**

**ING. CARLOS ALBERTO SALDAÑA ENDERICA**

**LA LIBERTAD – ECUADOR**

**2025**

## **AGRADECIMIENTO**

Gratitud a Dios por la oportunidad de poder estudiar una carrera universitaria, por darme la fortaleza para poder superar los obstáculos de dificultad que representa la carrera, el discernimiento para poder comprender las materias impartidas y poder enriquecerme de un concomimiento técnico.

Agradezco a mi familia por su apoyo, de manera especial a mis padres, porque con arduo trabajo han permitido que yo continúe con esta carrera universitaria, me han aconsejado para poder tomar las decisiones correctas en mi vida, y poder guiarme por las cosas correctas.

Agradezco a los docentes de la carrera de Electrónica y Telecomunicaciones, por el conocimiento impartido a lo largo de esta etapa universitaria, de manera particular al Ing. Carlos Saldaña, quien ha podido guiarme a lo largo de este camino, con sus enseñanzas para el proceso de esta investigación.

Luis Alberto Panchana Parra

## **DEDICATORIA**

Dedico este trabajo a mi madre Pilar Parra Tumbaco, por haberme dado la oportunidad de poder continuar con mis estudios, manteniendo un apoyo constante en cada uno de los momentos complejos que se presentaban en la carrera universitaria, a mi padre Luis Panchana Catuto (fallecido) que sembró en mí el camino de continuar y perseverar en una meta profesional. A mis hermanas Angie, Erika y Evolet, que mantienen un camino de perseverancia para poder cumplir con las metas propuestas, familiares que han estado en mi recorrido de vida de estudiante y por cada apoyo brindado, a mis hermanos de iglesia que han sido un pilar fundamental para poder llevar a cabo esta etapa universitaria, dándome siempre un consejo de superación que me ha permitido llegar hasta esta meta anhelada.

Luis Alberto Panchana Parra

## **APROBACIÓN DEL TUTOR**

En calidad de tutor de la propuesta tecnológica con título “Diseño y simulación de un control PID de orden fraccional para un robot de enlace único con flexibilidad”, presentado por el señor egresado Luis Alberto Panchana Parra, estudiante de la carrera de Electrónica y Telecomunicaciones, me permito declarar que luego de haber orientado, analizado y revisado, es aprobado en todas sus partes.

Particular que informo para los fines consiguientes.

---

Ing. Carlos Alberto Saldaña Enderica, MSc.  
Docente tutor

## **TRIBUNAL DE GRADO**

---

Ing. Washington Torres Guin, Mgt.

**DECANO DE FACULTAD**

---

Ing. José Aquino Sánchez, Mgt.

**DIRECTOR DE CARRERA**

---

Ing. Luis Chuquimarca Jiménez, Mgt.

**DOCENTE ESPECIALISTA**

---

Ing. Carlos Saldaña Enderica, Mgt.

**DOCENTE TUTOR**

---

Ab. María Rivera González Mgt.

**SECRETARIA GENERAL**

## **DECLARACIÓN DEL AUTOR**

Luis Alberto Panchana Parra, egresado de la Universidad Estatal Península de Santa Elena, Facultad de Sistemas y Telecomunicaciones, de la Carrera de Electrónica y Telecomunicaciones, declaro que toda la responsabilidad de la investigación realizada del presente trabajo de titulación es de mi pertenencia y la parte intelectual de la misma le corresponde a la Universidad Estatal Península de Santa Elena.



---

Luis Alberto Panchana Parra

## RESUMEN

Las técnicas de control en la actualidad se han vuelto indispensables en diferentes áreas del sector industrial, el controlador PID ha sido y sigue siendo uno de los controladores más utilizados en la mayoría de las empresas industriales, sin embargo, se han considerado técnicas más robustas, como lo es el controlador PID de orden fraccional, el mismo que tiene mayor eficiencia y se adapta a sistemas complejos.

La propuesta tecnológica tiene como fin implementar un control de orden fraccional PID para el control de posición en un sistema con flexibilidad en articulación y eslabón en un software de simulación numérico, se parte del estudio de las partes físicas y mecánicas de los sistemas flexibles en su articulación y eslabón para identificar las dinámicas del sistema, se obtiene un sistema total de articulación y eslabón flexible para poder trabajar en el mismo; se linealiza el sistema por medio de la técnica espacio de estados, y se procede a obtener por medio del simulador numérico un sistema en función de transferencia, el mismo que es necesario para la aplicación del control. Se diseña un controlador de orden fraccional para el sistema total y finalmente se evalúa el desempeño de este control diseñado aplicado a la dinámica total del sistema en un simulador numérico.

**PALABRAS CLAVES:** Sistema Flexible, Control, PID de Orden Fraccional, PID, Linealización, Espacio de Estados.

## **ABSTRACT**

Control techniques have become indispensable in different areas of the industrial sector. The PID controller has been and continues to be one of the most widely used controllers in most industrial companies. However, more robust techniques have been considered, such as the fractional order PID controller, which is more efficient and adapts to complex systems.

The technological proposal aims to implement a fractional order PID control for position control in a system with flexibility in joint and link in numerical simulation software. It starts with the study of the physical and mechanical parts of flexible systems in their joint and link to identify the dynamics of the system. A total flexible joint and link system is obtained in order to work on it. The system is linearized by means of the state space technique, and a transfer function system is obtained by means of the numerical simulator, which is necessary for the application of the control. A fractional order controller is designed for the total system and finally the performance of this designed control is evaluated applied to the total dynamics of the system in a numerical simulator.

**KEYWORDS:** Flexible System, Control, Fractional Order PID, PID, Linearization, State Space.

## INDICE GENERAL

AGRADECIMIENTO .....	ii
DEDICATORIA .....	iii
APROBACIÓN DEL TUTOR .....	iv
TRIBUNAL DE GRADO.....	v
DECLARACIÓN DEL AUTOR .....	vi
RESUMEN .....	vii
ABSTRACT.....	viii
INDICE GENERAL .....	ix
INDICE DE FIGURAS.....	xiii
INDICE DE TABLAS .....	xv
INTRODUCCIÓN .....	1
CAPÍTULO I .....	3
1. FUNDAMENTACIÓN.....	3
1.1 Antecedentes.....	3
1.2 Descripción del proyecto .....	5
1.3 Objetivos del Proyecto.....	6
1.3.1 Objetivo General:.....	6
1.3.2 Objetivos Específicos: .....	6
1.4 Justificación .....	6
1.5 Alcance del Proyecto .....	7
1.6 Metodología de la investigación.....	8
1.6.1 Investigación Descriptiva.....	8
1.6.2 Investigación Documental .....	8
1.6.3 Investigación Aplicada.....	8
1.7 Resultados Esperados .....	9
CAPÍTULO II .....	10
2. MARCO REFERENCIAL.....	10
2.1. MARCO CONTEXTUAL.....	10
2.2 MARCO CONCEPTUAL .....	11
2.2.1 Modelamiento matemático en espacio de estados .....	11
2.2.2 Sistemas flexibles.....	13
2.2.2.1 Sistemas con flexibilidad en la articulación.....	13

2.2.2.2	Sistemas con flexibilidad en el eslabón.....	13
2.2.3	Parámetros de respuesta transitoria.....	14
2.2.4	Fundamentos del cálculo fraccionario .....	16
2.2.4.1	Funciones especiales .....	17
2.2.4.2	Forma ampliada de la derivada e integral .....	18
2.2.4.3	Integral de orden fraccionaria .....	20
2.2.4.4	Derivada de orden fraccionaria .....	21
2.2.5	Control fraccionario .....	21
2.2.5.1	Controlador PID clásico .....	21
2.2.5.2	Parte integral del controlador .....	22
2.2.5.3	Parte derivativa del controlador .....	23
2.2.5.4	Controlador PID de orden fraccionario.....	24
2.2.6	Sintonización y optimización del control PID de orden fraccionario.....	25
2.2.6.1	Atenuación de ruido de alta frecuencia .....	27
2.2.6.2	Rechazo de interferencias de salida .....	27
2.2.6.3	Robustez frente a cambios en la ganancia del sistema.....	27
2.2.7	Herramientas de software .....	28
2.2.8	Diseño de controladores FOPID empleando herramientas computacionales.....	29
2.2.8.1	Técnicas de sintonización.....	30
2.2.8.2	Algoritmos de optimización.....	36
2.2.8.3	Métricas de desempeño .....	38
2.2.8.4	Algoritmos de aproximación.....	40
2.2.8.5	Algoritmo para el diseño de controladores fraccionarios.....	41
2.3	MARCO TEORICO .....	42
CAPITULO III.....		44
3.	DESARROLLO .....	44
3.1	Componentes de la propuesta .....	44
3.1.1	Componentes lógicos .....	44
3.1.1.1	Software MATLAB© Simulink.....	44
3.1.1.2	Herramienta computacional FOMCON .....	44
3.2	Diseño de la propuesta.....	45
3.2.1	Modelado matemático servomotor .....	45
3.2.2	Modelado matemático articulación flexible.....	47
3.2.2.1	Simulación articulación flexible.....	51

3.2.3 Modelado matemático eslabón flexible .....	53
3.2.3.1 Simulación Eslabón Flexible.....	55
3.2.4 Unión de los sistemas de articulación y eslabón flexible .....	58
3.2.4.1 Dinámica del sistema con articulación y eslabón flexible .....	60
3.2.4.2 Simulación articulación y eslabón flexible .....	60
3.2.5 Linealización del modelado matemático usando la técnica espacio de estados ...	65
3.2.6 Evaluación de los puntos de operación para el sistema flexible en articulación y eslabón .....	69
3.2.6.1 Linealización del sistema con punto de operación en $0^0 / 360^0$ .....	70
3.2.6.2 Linealización del sistema con punto de operación en $90^0$ .....	72
3.2.6.3 Linealización del sistema con punto de operación en $180^0$ .....	73
3.2.6.4 Linealización del sistema con punto de operación en $270^0$ .....	74
3.2.7 Diseño y desarrollo del controlador PID tradicional .....	76
3.2.7.1 Método heurístico para diseño de control PID.....	76
3.2.7.2 Selección de parámetros $Kp$ , $Ki$ y $Kd$ mediante el comportamiento de la base y punta del sistema flexible.....	77
3.2.8 Diseño y desarrollo del controlador PID de orden fraccionario .....	80
3.2.8.1 Algoritmo para control PID de orden fraccionario aplica al sistema flexible	80
3.2.8.2 Identificación de sistema por función de transferencia.....	81
3.2.8.3 Comparativa espacio de estados a función de transferencia .....	83
3.2.8.4 Métodos de los controles PID fraccionarios para el sistema flexible .....	84
3.2.8.5 Herramienta computacional FOMCON para sintonización y simulación del sistema flexible.....	86
3.2.8.6 Controladores PID de orden fraccionarios para el sistema flexible .....	86
3.2.8.7 Comportamiento de los controles PID de orden fraccionario aplicados al sistema flexible en articulación y eslabón.....	88
CAPITULO IV.....	97
4. Evaluaciones y resultados .....	97
4.1 Análisis del rendimiento de los controladores.....	97
4.1.1 Análisis y comparativa de los parámetros temporales.....	97
4.1.1.1 Parámetros de respuesta de la evaluación de los controles PID de orden fraccionario.....	100
4.1.2 Análisis del rendimiento basado en los índices de error.....	101
4.1.2.1 Métricas de desempeño de los controladores fraccionarios PID.....	102
4.1.3 Análisis y comparativa control PID y FOPID .....	103

4.1.3.1 Análisis base del eslabón flexible ( $\theta_1$ ).....	104
4.1.3.2 Análisis punta del eslabón flexible ( $\alpha$ ).....	105
CONCLUSIONES .....	106
RECOMENDACIONES.....	108
BIBLIOGRAFÍA .....	109
ANEXOS .....	113

## INDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1.</b> Sistema de articulación flexible [29].	13
<b>Figura 2.</b> Sistema eslabón flexible [29].	14
<b>Figura 3.</b> Respuesta transitoria frente a una señal de escalón unitario [33].	15
<b>Figura 4.</b> Región de integración para la integral generalizada [35].	19
<b>Figura 5.</b> Acciones de control para diferentes valores fraccionarios [37].	23
<b>Figura 6.</b> Acción de control derivativa [37].	24
<b>Figura 7.</b> Espacio de control PID de orden fraccionario [40].	25
<b>Figura 8.</b> Pasos para la elaboración de control PID fraccionario [44].	30
<b>Figura 9.</b> Comportamiento ante el escalón de una planta [9].	31
<b>Figura 10.</b> Comportamiento en forma de S [9].	31
<b>Figura 11.</b> Oscilación repetida con ciclo repetitivo Pcr [9].	33
<b>Figura 12.</b> Algoritmo para el diseño de controles fraccionarios [44].	41
<b>Figura 13.</b> Relación de FOMCON y otras herramientas de cálculo fraccionario [52].	45
<b>Figura 14.</b> Variables dinámicas articulación flexible.	47
<b>Figura 15.</b> Simulink articulación flexible.	51
<b>Figura 16.</b> Simulink Servomotor.	51
<b>Figura 17.</b> Simulink Articulación Flexible.	52
<b>Figura 18.</b> Eje Inicial Articulación Flexible ( $\theta_2$ ).	52
<b>Figura 19.</b> Eje Final Articulación Flexible ( $\theta_1$ ).	53
<b>Figura 20.</b> Variables dinámicas enlace flexible.	53
<b>Figura 21.</b> Simulink eslabón flexible.	55
<b>Figura 22.</b> Simulink Servomotor.	56
<b>Figura 23.</b> Simulink Eslabón Flexible.	56
<b>Figura 24.</b> Base del Eslabón Flexible $\theta$ .	57
<b>Figura 25.</b> Efecto Final Eslabón Flexible $\alpha$ .	57
<b>Figura 26.</b> Sistema articulación y eslabón flexible.	59
<b>Figura 27.</b> Simulación dinámica articulación y eslabón flexible.	62
<b>Figura 28.</b> Simulink Servomotor.	62
<b>Figura 29.</b> Simulación en diagrama de bloques articulación y eslabón flexible.	63
<b>Figura 30.</b> Salida Inicial Servomotor ( $\theta_2$ ).	63
<b>Figura 31.</b> Salida Final Servomotor ( $\theta_1$ ).	64
<b>Figura 32.</b> Efecto Final Enlace Flexible ( $\alpha$ ).	64
<b>Figura 33.</b> Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso $1^0$ .	71

<b>Figura 34.</b> Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso $360^{\circ}$ . .....	71
<b>Figura 35.</b> Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso $90^{\circ}$ . .....	73
<b>Figura 36.</b> Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal escalón $180^{\circ}$ . .....	74
<b>Figura 37.</b> Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal escalón $270^{\circ}$ . .....	75
<b>Figura 38.</b> Ajuste prueba y error control PID. ....	77
<b>Figura 39.</b> Análisis del valor final del ángulo de $\theta_1$ . ....	79
<b>Figura 40.</b> Pasos para el diseño del control fraccionario PID.....	80
<b>Figura 41.</b> Código transformación de espacio de estados a función de transferencia. ....	82
<b>Figura 42.</b> Función de transferencia salida $\theta_2$ .....	82
<b>Figura 43.</b> Función de transferencia salida $\theta_1$ .....	82
<b>Figura 44.</b> Función de transferencia salida $\alpha$ .....	82
<b>Figura 45.</b> Combinaciones para el desarrollo del control PID fraccionario. ....	85
<b>Figura 46.</b> Código para el cálculo del margen de ganancia. ....	85
<b>Figura 47.</b> Herramienta "Fractional PID controller" en el diagrama del sistema. ....	86
<b>Figura 48.</b> Controlador Fpid_optim, Nealder Mead, ISE. ....	88
<b>Figura 49</b> Controlador Fpid_optim, Nealder Mead, IAE.....	89
<b>Figura 50.</b> Controlador Fpid_optim, Nealder Mead, ITSE.....	89
<b>Figura 51.</b> Controlador Fpid_optim, Nealder Mead, ITAE. ....	90
<b>Figura 52.</b> Controlador Fpid_optim, Inter Point, ISE. ....	90
<b>Figura 53.</b> Controlador Fpid_optim, Inter Point, IAE. ....	91
<b>Figura 54.</b> Controlador Fpid_optim, Inter Point, ITSE.....	91
<b>Figura 55.</b> Controlador Fpid_optim, Inter Point, ITAE.....	92
<b>Figura 56.</b> Controlador Fpid_optim, Sequential Quadratic Programming, ISE. ....	92
<b>Figura 57.</b> Controlador Fpid_optim, Sequential Quadratic Programming, IAE.....	93
<b>Figura 58.</b> Controlador Fpid_optim, Sequential Quadratic Programming, ITSE. ....	93
<b>Figura 59.</b> Controlador Fpid_optim, Sequential Quadratic Programming, ITAE. ....	94
<b>Figura 60.</b> Controlador Fpid_optim, Active Set, ISE. ....	94
<b>Figura 61.</b> Controlador Fpid_optim, Active Set, IAE.....	95
<b>Figura 62.</b> Controlador Fpid_optim, Active Set, ITSE.....	95
<b>Figura 63.</b> Controlador Fpid_optim, Active Set, ITAE. ....	96
<b>Figura 64.</b> Control PID tradicional y control PID fraccionario en base y eslabón flexible... 103	
<b>Figura 65.</b> Evaluación controles PID fraccionarios y PID tradicional base eslabón ( $\theta_1$ ). .... 104	
<b>Figura 66.</b> Evaluación controles PID fraccionarios y PID tradicional base eslabón ( $\alpha$ ). ..... 105	

## INDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1.</b> Parámetros en espacio de estados [31].....	11
<b>Tabla 2.</b> Parámetros de respuesta transitoria [33] .....	15
<b>Tabla 3.</b> Parámetros del control PID [35]. .....	22
<b>Tabla 4.</b> Características de herramientas computacionales [18]. .....	28
<b>Tabla 5.</b> Método 1 de ajuste de Ziegler-Nichols en base a la respuesta del escalón [9]. .....	32
<b>Tabla 6.</b> Regla de Ziegler-Nichols (Segundo Método) [9]. .....	33
<b>Tabla 7.</b> Cálculo de parámetros $K_p$ , $K_i$ y $K_d$ mediante Cohen-Coon [45]. .....	34
<b>Tabla 8.</b> CHR1 Método de cálculo $K_p$ , $K_i$ y $K_d$ [46]. .....	36
<b>Tabla 9.</b> CHR2 Método de cálculo $K_p$ , $K_i$ y $K_d$ [46]. .....	36
<b>Tabla 10.</b> Parámetros del servomotor [54].....	47
<b>Tabla 11.</b> Parámetros articulación flexible [54].....	48
<b>Tabla 12.</b> Parámetros eslabón flexible [53] .....	54
<b>Tabla 13.</b> Parámetros actualizados sistema de articulación y eslabón flexible.....	61
<b>Tabla 14.</b> Resolución de derivadas parciales para la matriz espacio de estados.....	67
<b>Tabla 15.</b> Evaluación de puntos de operación.....	69
<b>Tabla 16.</b> Respuesta del sistema ante diferentes puntos de operación.....	76
<b>Tabla 17.</b> Método prueba y error para señales de control PID. ....	78
<b>Tabla 18.</b> Comparativo espacio de estados y función de transferencia. ....	83
<b>Tabla 19.</b> Componentes del diseño de los controladores PID fraccionarios.....	87
<b>Tabla 20.</b> Respuesta de los sistemas de control .....	98
<b>Tabla 21.</b> Parámetros de respuesta de los controladores PID fraccionarios. ....	101
<b>Tabla 22.</b> Índice de desempeño de los controladores.....	102

## INDICE DE ANEXOS

<b>Anexo 1.</b> Diseño del controlador PID fraccionario para el sistema flexible. ....	113
<b>Anexo 2.</b> Comando para abrir el optimizador PID fraccionario. ....	113
<b>Anexo 3.</b> Configuraciones para sintonizar las componentes principales $KP$ , $Ki$ y $Kd$ . ....	113
<b>Anexo 4.</b> Parámetros $KP$ , $Ki$ y $Kd$ determinados por la herramienta “Fpid Optimization tool”. .....	114
<b>Anexo 5.</b> Configuración para el cálculo de los componentes fraccionarios del control PID fraccionario $\lambda$ y $\mu$ . ....	114
<b>Anexo 6.</b> Cálculos finales de los componentes del control PID fraccionario $KP$ , $Ki$ , $Kd$ , $\lambda$ y $\mu$ . .....	115
<b>Anexo 7.</b> Ingreso de los componentes fraccionarios al diagrama de bloques. ....	115
<b>Anexo 8.</b> Análisis de respuesta con señal tipo impulso. ....	116
<b>Anexo 9.</b> Análisis de respuesta con señal escalón. ....	116
<b>Anexo 10.</b> Adaptación final del bloque PID fraccionario al sistema flexible. ....	116
<b>Anexo 11.</b> Análisis de comparativa de los mejores controles seleccionados PID fraccionarios con un PID común. ....	117

## INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas se ha dado a conocer un interés significativo en el control de manipuladores flexibles y livianos, que se está convirtiendo en una de las áreas de investigación de control robótico más desafiantes. La necesidad de este tipo de robots surge de implementaciones recientes en la robótica, donde requieren robots más ligeros y que puedan ser estimulados con menor cantidad de energía, además el impacto de este tipo de robots manifiesta resultados menos destructivos que los producidos por robots tradicionales, ya que la energía cinética del movimiento se convierte en energía potencial de deformación en el momento de la colisión. Es aquí donde esta circunstancia nos permite realizar estrategias de control sobre el actuador antes de producir algún tipo de daño o, al menos minimizarlo, llegando a tener prototipos robóticos que no represente algún tipo de peligro [1].

La flexibilidad es una cualidad no deseada en los manipuladores debido a que causa significativas dificultades de control, como la vibración y deflexión estática. Estas problemáticas de control surgen de efectos externos, fallos de diseño y comportamiento dinámico no lineal de materiales flexibles. Los movimientos vibratorios no lineales reducen la exactitud del punto final, extienden el tiempo de estabilización y dificultan el diseño del controlador. Según una encuesta de sistemas flexibles [2], los algoritmos de control elaborados para sistemas flexibles actuales, tienen varias restricciones de precisión y exactitud, sin embargo, los controladores podrían mejorar con diferentes estructuras de diseño [3].

En [4] se diseñó un algoritmo de control que permite manipular de manera satisfactoria un robot flexible de 3GDL. En el libro [5] se realiza una recopilación de más de 10 años de investigación y desarrollo en dinámica y controles de robots flexibles. En [6] se analiza la viabilidad del modelado y controladores de orden fraccionario en sistemas robóticos. En el libro [7] se conoce métodos de ajuste, estructuras de controles especiales con controladores PID y aplicaciones. En [8] se presenta un controlador GA-LQR que aborda el problema de seguimiento y la supresión de vibraciones de un manipulador flexible.

El trabajo de titulación está formado por cuatro capítulos:

En el capítulo I se redactan los puntos generales como antecedentes, objetivos, descripción, justificación y la metodología empleada. En el capítulo II se considera el fundamento teórico donde se explica el marco contextual, conceptual y teórico, donde se mencionan los temas en donde se basará el desarrollo de esta propuesta de estudio. En el capítulo III se desarrolla la investigación del modelamiento matemático de los sistemas flexibles en articulación y eslabón, desarrollo de la unión de ambos sistemas dinámicos, linealización en espacio de estados, control PID de forma heurística aplicado al sistema flexible, PID fraccionario aplicado al sistema flexible para optimización, evaluación del comportamiento del control PID fraccionario aplicado al sistema flexible y comportamiento de la oscilación en la punta del sistema flexible ( $\alpha$ ) con el control aplicado. En el capítulo final IV se hace la respectiva selección y evaluación de los mejores controles PID fraccionarios obtenidos, mejores controles en base a métricas de desempeño, evaluación de mejores controles en base a la oscilación en la punta del sistema ( $\alpha$ ), comparativa PID fraccionario con un PID común, análisis de la optimización del sistema y comportamiento de la base ( $\theta_1$ ) y punta de eslabón ( $\alpha$ ). Posteriormente conclusiones, recomendaciones, bibliografías y anexos.

La principal contribución de esta investigación es, mediante la indagación de las características en sistemas de articulación y eslabón flexible, deducir las ecuaciones dinámicas que representan su comportamiento, y a través de aquello, formar un solo sistema en articulación y eslabón, ya que de manera general, solo existen sistemas con articulación flexible o eslabón flexible, y a través del sistema total definido, se busca implementar un control de orden fraccionario PID para el control de posición del sistema flexible, debido a la deflexión causada por la flexibilidad en la articulación se producen oscilaciones en la punta del eje del servomotor (base del eslabón), y posteriormente se desestabiliza la punta del eslabón (efector final). Como parte final evaluar el rendimiento del controlador a través de métricas de rendimiento, comparativas con un PID tradicional y análisis en el comportamiento de la base y efector final del eslabón flexible, todo esto desarrollado en un simulador numérico.

# CAPÍTULO I

## 1. FUNDAMENTACIÓN

### 1.1 Antecedentes

Los sistemas de control automático han ejercido un rol fundamental en el progreso de la ingeniería y el conocimiento, así mismo de su gran relevancia en técnicas de artefactos espaciales, de direccionamiento de misiles, máquinas automáticas y análogas; el control de manera automática actualmente es considerado una pieza significativa en los diferentes desarrollos industriales y de producción moderna [9].

Los controladores PID (Proporcional-Integral-Derivativo) son considerados los más aprobados en la producción industrial, esto en base a su particular provecho costo/beneficio que logra proveer. En el siglo XX, una cifra considerable de científicos los ha estimado, y como consecuencia la producción industrial ha progresado de manera significativa en cada una de sus funciones. Los proyectos en el planteamiento y posicionamiento punto a punto de técnicas de control fundamentados en PID, han originado un gran desarrollo literario en los últimos años [7].

El primer uso del cálculo fraccional se desarrolló por Niels Henrik Abel en el año de 1823. Reveló que el arreglo de la función integral para la problemática de la curva tautócrona se podía determinar en manera de orden de 0,5 [10]. La primera investigación de manera metódica de análisis fraccionario fue desarrollada en 1832 por Joseph Liouville, quien se encontraba atraído especialmente por las concisas aclaraciones de Laplace y Fourier, además de la exposición de Niels Abel. En el año de 1990 M. Axtell [11], argumentó la utilidad del cálculo fraccional a las técnicas de control. Incluyó operadores integrales desiguales empleando la transformada de Laplace.

Podlubny difundió la primera documentación de un control de orden fraccional PID en el año de 1994. Se estimó un procedimiento de orden fraccional y se examinó que el control fraccional PID es un diseño apropiado para dar dominio a una técnica de orden fraccional [12].

En las últimas décadas, la robótica ha llamado el interés de muchos investigadores, debido a la cantidad de experimentaciones realizadas en el área científica y de la ingeniería, como el rastreo espacial, investigaciones en el mar, industrias militares, técnicas de soldadura, servicios médicos, etc.[13],[14]. Por consiguiente existe una categoría denominada manipuladores flexibles que también ha llamado la atención en el campo de la robótica, donde estos prototipos se caracterizan por las ventajas que poseen, como el poco peso, por la delgadez de sus eslabones [15].

El requerimiento de sistemas robóticos de gran rendimiento ha originado una robusta investigación en diferentes zonas multidisciplinaria, como es el diseño y técnicas de control en brazos robóticos flexibles y de peso liviano. Los robots manipuladores con flexibilidad, considerando que tienen sus propias ventajas sobre los robots rígidos comunes, han propuesto condiciones más rigurosas en el planteamiento del sistema de control, detección exacta del punto final y la eliminación inmediata, de la oscilación transitoria cuando realizan movimientos con rapidez [16].

En [17] se implementó un controlador para un manipulador de enlace flexible basado en el cálculo fraccionario, se presentó primero el modelo dinámico del sistema, y luego se implementaron diferentes tipos de controladores, como el controlador borroso, controlador PID y controlador PID de orden fraccional, se investigó la implementación y el rendimiento de cada uno de ellos, y se observó que el error de posición en el modo de implementación del controlador borroso y el control PID fraccional es menor que el control PI, la entrada de control es más suave y la vibración es de menor magnitud. Además, en el caso de una perturbación constante y uniforme, el controlador PID fraccionario es el más adecuado para un robot de enlace flexible.

En [18] se diseñó e implementó un controlador embebido PID fraccionario, orientado al control de velocidad de articulación de codo, en un prototipo robótico, para luego estudiar y examinar el rendimiento de los sistemas PID de orden fraccionario y PID clásico. Se implementaron 7 controladores PID clásico y 10 controladores FOPID en un sistema embebido autónomo, esto se realizó en una plataforma embebida FPGA usando lenguaje LabVIEW y RT. Considerando las evaluaciones experimentales y comparación de los microcontroladores en base a los parámetros temporales y los índices de error; los controladores embebidos de mejor desempeño fueron FOPID basado en el

método de sintonización Ziegler-Nichols-ISE, aproximación Nelder-Mead, y controlador PI basado en el método Chien-Regulator.

Los sistemas de control en el área de la robótica han tenido un gran desarrollo en los últimos años, donde existe una categoría de robot denominada manipuladores flexibles, que ha llamado mucho la atención, debido a las características que poseen, como lo son sus eslabones delgados, donde se ha tomado de forma particular el uso del control PID fraccionario, considerado como una solución robusta de control en este tipo de robots manipuladores. Dentro de las investigaciones se han dado a conocer comparativas, entre el control PID fraccionario con otros tipos de controladores, como también control de velocidad de un eslabón, aplicando este tipo de sistema de control robusto, donde el control PID fraccional ha destacado un rendimiento óptimo, disminuyendo las oscilaciones que se producen en el accionamiento de los prototipos flexibles, en comparación con otros controladores clásicos.

## **1.2 Descripción del proyecto**

El presente trabajo tiene como finalidad, el diseño y simulación de un controlador PID fraccionario para el control de posición en un robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón, obteniendo un sistema óptimo para regular las perturbaciones en los cambios de posición de un sistema robótico flexible.

Se realiza un estudio exhaustivo de la parte física y mecánica de los sistemas flexibles en articulación y eslabón para determinar su comportamiento dinámico, se obtiene un modelado matemático total del sistema uniendo los sistemas mencionados, este representa el comportamiento dinámico final del prototipo, se linealiza el sistema en diferentes puntos de operación para conocer su comportamiento y establecer un punto de evaluación en donde se empleará el control. Se diseña un control PID fraccionario para la flexibilidad en articulación y eslabón del robot, donde posterior se evalúa el comportamiento del sistema mediante la simulación de la dinámica del robot con el control diseñado.

Se evalúa el desempeño de una cantidad definida de controladores PID fraccionario aplicado a la dinámica de un sistema robótico de enlace único flexible en articulación y eslabón mediante un software de simulación numérico, esta evaluación

permite delimitar la eficiencia de los controladores planteado para aplicaciones en sistemas de enlace único, estos controles varían por los ajustes de métricas de desempeño y algoritmos de optimización, se considera también valores importantes de evaluación del sistema como porcentaje de sobre elongación, tiempo de establecimiento, ángulo final de la base del sistema y rango de oscilación en el efector final del sistema flexible.

### **1.3 Objetivos del Proyecto**

#### **1.3.1 Objetivo General:**

Diseñar y simular un control PID fraccionario para el control de posición en un robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón mediante un software de simulación numérico.

#### **1.3.2 Objetivos Específicos:**

- Investigar las características físicas y mecánicas de un robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón para determinar su comportamiento dinámico.
- Diseñar y simular el sistema de control PID fraccionario para la flexibilidad de articulación y eslabón del robot con el fin de evaluar el comportamiento del sistema.
- Evaluar el desempeño del controlador PID fraccionario diseñado en un sistema robótico de enlace único flexible en articulación y eslabón mediante un simulador numérico.

### **1.4 Justificación**

El crecimiento de la industria en la actualidad tiene la necesidad del mejoramiento de los robots rígidos existentes. Este progreso positivo influye en particular a los costos de construcción, el uso de energía y el incremento de la producción, los robots rígidos ya no tienen las características para cumplir con estos requerimientos, debido al peso y volumen que poseen. Los manipuladores con flexibilidad son la solución para los requisitos que desea la industria actual, estos prototipos son más ligeros y utilizan menos material, lo que contribuye en el costo de producción, asimismo utilizan menos energía, al estar equipado con actuadores pequeños [19].

En la actualidad, los autómatas programables se están convirtiendo en sistemas cada vez más robustos, donde las técnicas de control tradicional están perdiendo su robustez, como consecuencia, aumenta la complejidad de su control para interactuar con su entorno de trabajo [20]. Recientemente, la teoría de orden fraccional, el modelado y técnica de control de orden fraccionario, empleando derivadas e integrales de orden fraccionario, han sido reconocidos como una estrategia alternativa para dar solución a distintos problemas de control robusto de forma efectiva [21],[22].

Dentro de las investigaciones realizadas en la Universidad Estatal Península de Santa, se encuentran estudios relacionados al área de la robótica en diferentes tipos de aplicaciones, como la recopilación de datos oceanográficos, vigilancia, seguridad, y contribución de la limpieza [23], [24], [25]. Pero solo ha existido una investigación orientada a robots manipuladores en el año 2014 [26], donde se diseñó la implementación de un brazo robótico, para reconocer y manipular objetos, utilizando inteligencia artificial. Por consiguiente, existen también estudios donde se ha aplicado control PID en el diseño de sistemas de procesos automatizados, como el control y monitoreo dentro un sistema de refrigeración [27], y sistema de control para el sellado de botellas dentro de una planta de agua [28]; donde se puede apreciar que, hay poca investigación orientada a los robots manipuladores, además de que los controles empleados como el PID, solo han sido implementados dentro de sistemas automáticos. Por tal motivo, mediante esta propuesta se busca desarrollar el área de la investigación en la universidad, implementando herramientas pertenecientes a la teoría de control con un enfoque hacia los procesos industriales y a la investigación científica.

### **1.5 Alcance del Proyecto**

En este estudio, se propone realizar un diseño y simulación de un control PID fraccionario para un robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón, con el fin de obtener un control de posición eficiente en el accionamiento del sistema.

Se lleva a cabo una investigación para determinar las características físicas y mecánicas de los sistemas de enlace único con flexibilidad en articulación y eslabón, por consiguiente, se desarrolla un modelo matemático que represente el comportamiento dinámico de ambos sistemas unidos, se establece un punto de evaluación mediante la linealización del sistema flexible para la implementación del control. Se realiza el diseño

del controlador PID fraccionario para la flexibilidad en articulación y eslabón, luego utilizando una herramienta de simulación se evalúa el comportamiento de la dinámica del sistema robótico con el controlador creado.

Se busca analizar un número definido de controladores PID de orden fraccionario, evaluando su desempeño aplicado a la dinámica de un sistema flexible en articulación y eslabón, para determinar la factibilidad de este tipo de controles a este sistema complejo inestable, donde se compara los diferentes tipos de parámetros determinados de cada uno de los controles, los mismos que varían por medio de los ajustes en algoritmos de optimización e índices de desempeño, se evalúa también valores importantes como porcentaje de sobre elongación y tiempo de establecimiento, ángulo final de la base del sistema y oscilación en la punta del sistema.

## **1.6 Metodología de la investigación**

### **1.6.1 Investigación Descriptiva**

En el proyecto investigativo se describe el sistema de control PID fraccionario, para un sistema robótico de enlace único con flexibilidad en articulación y eslabón, para el control de posición evaluando su rendimiento utilizando un simulador numérico.

### **1.6.2 Investigación Documental**

Considerando como fundamento las investigaciones, resultados de tesis y revistas científicas orientadas a teoría de control clásico, defender el progreso de este proyecto con la adquisición de conocimientos, sobre diseño de PID fraccionario, simulación e implementación en sistemas robóticos con flexibilidad, y el desempeño de este mediante herramientas de simulación.

### **1.6.3 Investigación Aplicada**

El proyecto investigativo busca analizar el desempeño de la implementación de la técnica de control PID fraccionario, en un robot de enlace único con flexibilidad en articulación y eslabón, utilizando un simulador matemático.

## 1.7 Resultados Esperados

Los resultados previstos tras el desarrollo de este proyecto son los siguientes:

- Identificar las características físicas y mecánicas del robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón.
- Describir de manera minuciosa la dinámica del robot de enlace único con articulación y eslabón flexible.
- Obtener un controlador PID fraccionario diseñado y optimizado para el control de posición del robot de enlace único con flexibilidad en su articulación y eslabón.
- Evaluar el comportamiento del sistema de control, mediante la simulación de la dinámica del robot con el controlador diseñado.
- Determinar el desempeño del controlador PID fraccionario para el sistema flexible, mediante métricas de desempeño.
- Evaluar el rendimiento del control PID fraccionario para el sistema flexible, mediante la comparativa con un PID tradicional y análisis de parámetros de respuesta.

## CAPÍTULO II

### 2. MARCO REFERENCIAL

#### 2.1. MARCO CONTEXTUAL

A partir del primer prototipo robótico industrial instalado en 1960, una cantidad de servicios se han originado en la rama de la ingeniería. Como ejemplo podemos considerar la parte industrial, en el cual se puede distinguir las labores de soldadura, corte, arte de la pintura, manipulación de objetos, etc. La fama en la utilidad de los brazos robóticos en las industrias de producción reside en su velocidad y precisión; una articulación robótica tiene capacidad de llevar tareas 24 horas al día sin paralizarse y asegurando la exactitud de sus respectivos movimientos. La exactitud de dichos prototipos robóticos radica de manera fundamental en la eficacia de sus sistemas de control. En consecuencia, el rendimiento de un sistema de control depende de dos partes fundamentales: primero es la calidad de la programación de control que se emplea para manipular el prototipo, y segundo es el modelamiento matemático que se emplea para plantear el control del robot [4].

Los robots funcionan mediante motores eléctricos, en la actualidad su uso es muy frecuente en la industria manufacturera. Donde se ha considerado que el objetivo más fundamental para estos sistemas robóticos es conducir al efector final del prototipo, a un punto de referencia deseado, de manera que pueda cumplir con las tareas correspondidas. Actualmente, se investiga que los robots sean más livianos, esto se consigue rectificando su geometría o empleado elementos más ligeros, pero con esto se produce un fenómeno de oscilación del efector del robot, al momento de acercarse en el punto de referencia deseado. Estas oscilaciones se presentan por la flexibilidad existente en su articulación y eslabón [29].

En el Ecuador se encuentran diversas empresas, como la metalmecánica, la agropecuaria, entre otras, que sostienen en sus procesos brazos robóticos industriales de manera automatizada, con el objetivo de mejorar la producción. La enseñanza del día a día, se va renovando de manera dinámica, en donde la búsqueda de mejores resultados en una empresa con respecto a su ciencia, son considerados el progreso científico que produce conocimientos y progresos. Los procesos automatizados y el control se aproximan a un auténtico avance de herramientas robóticas, tanto en la parte teórica

como también práctica [30].

El diseño de un controlador PID fraccional para un robot de enlace único con flexibilidad, tiene como finalidad desarrollar la técnica de la teoría de control, por medio del análisis de la capacidad y respuesta del control a diseñar en un robot de eslabón único con flexibilidad, en el sector industrial y área investigativa.

Un sistema con una entrada y tres salidas (SIMO) es la planta para controlar, por medio del análisis de sus características físicas y mecánicas se determina el modelo matemático del comportamiento dinámico, además se lleva a cabo el algoritmo de control PID fraccional mediante un simulador numérico, de manera que se consiga un sistema de control de posición de la base del eslabón flexible reduciendo las oscilaciones en la punta del mismo.

## 2.2 MARCO CONCEPTUAL

### 2.2.1 Modelamiento matemático en espacio de estados

Un modelado matemático es considerado una tarea no sencilla, debido a que la mayoría de las veces en los mecanismos se manifiestan características complejas de manera no lineal, así mismo son afectados por disturbios no modelados o que son considerados complejos de determinar su modelo matemático. El diseño de espacio de estados proporciona la capacidad de analizar el comportamiento de cada una de las variables propias del sistema en el dominio temporal y no en el de Laplace, asimismo del análisis de la correlación entrada/salida, en la tabla (1) se consideran las siguientes definiciones [31]:

**Tabla 1.** Parámetros en espacio de estados [31].

<b>Parámetro</b>	<b>Definición</b>
<b>Estado</b>	Es la descripción detallada interna del sistema complejo en cada tiempo instantáneo. Las respuestas del sistema están condicionadas por los estados y señales de entrada.
<b>Variable de estado</b>	Son los parámetros que representan el comportamiento dinámico de un sistema.
<b>Vector de estado</b>	Es la clasificación de variables de estado en estructura de vector que simbolice una ubicación en el espacio.

<b>Ecuaciones de estado</b>	Son sistemas de ecuaciones algebraicas lineal en forma matricial, que describen la dinámica del sistema y las salidas de este.
<b>Espacio de estados</b>	Es un espacio vectorial de dimensión $n$ donde sus ejes están constituidos por variables de estado dinámico.

Para llevar a cabo el modelamiento matemático de un sistema, se establece los pasos siguientes [31]:

1. Reconocer la clase de sistema, ya sea mecánico hidráulico, térmico, eléctrico, etc. Con la información es necesario formular las ecuaciones integro-diferenciales, que controlan al sistema.
2. Formular las ecuaciones que identifican al sistema.
3. Especificar la(s) variables de entrada(s), la(s) salida(s) del mecanismo y los parámetros de estado.
4. Establecer las variables de mayor grado (*orden*  $n + 1$ ) de cada condición y definir el vector de variable de estado, partiendo por los parámetros de mayor orden menos uno (*orden*  $n$ ).

Los sistemas de automatización pueden mostrar un desempeño que inevitablemente se comportan de forma no lineal. La dinámica de los sistemas se puede interpretar con varias aproximaciones lineales. Dentro de los casos más generales se muestran a continuación en los siguientes puntos [31]:

- **No linealidad en el comienzo:** La dificultad de la no linealidad en el inicio se resuelve con una linealización. Es importante encontrar una solución básica.
- **No linealidad interna:** En esta situación al contar con la no linealidad en una de sus partes internas del proceder del sistema, se considera más sencillo simplificar las dos partes lineales y diseñar su espacio lineal hasta su punto de encuentro.

### 2.2.2 Sistemas flexibles

En termino generales se puede expresar que un robot flexible es aquel sistema que posee algún componente con cierto grado de elasticidad, haciendo referencia con elasticidad a la característica mecánica de una pieza de deformarse elásticamente ante un requerimiento de una fuerza rotacional. En la robótica se conocen dos tipos de flexibilidad [29]:

#### 2.2.2.1 Sistemas con flexibilidad en la articulación

La flexibilidad en las articulaciones se origina como la consecuencia de la deformación torsional en los componentes que conectan los dispositivos de control (motores) con los enlaces (eslabones) y continuamente es de tipo rotatorio. Se lo traduce como una variación angular, por ejemplo, los mecanismos reductores de los robots suelen experimentarlo cuando están expuestos a movimientos rápidos. La figura (1) muestra el comportamiento de una articulación flexible [29].

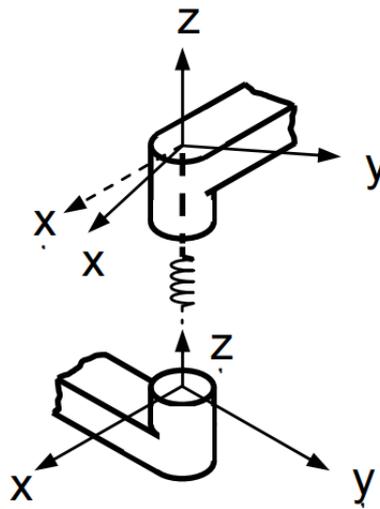


Figura 1. Sistema de articulación flexible [29].

#### 2.2.2.2 Sistemas con flexibilidad en el eslabón

Este fenómeno surge como el producto de movimientos de forma apresurada, del traslado de cargas pesadas o de la formación de momentos de fuerza en la parte final del enlace, consecuencia de la ejecución de tareas que conlleven una interacción con el entorno. En esta situación se origina una flexibilidad en cada eslabón que se entiende como una variación de la posición de su parte final respecto a la ubicación calculada mediante geometría (como si no fuera flexible). La figura (2) muestra el comportamiento de un eslabón flexible [29].

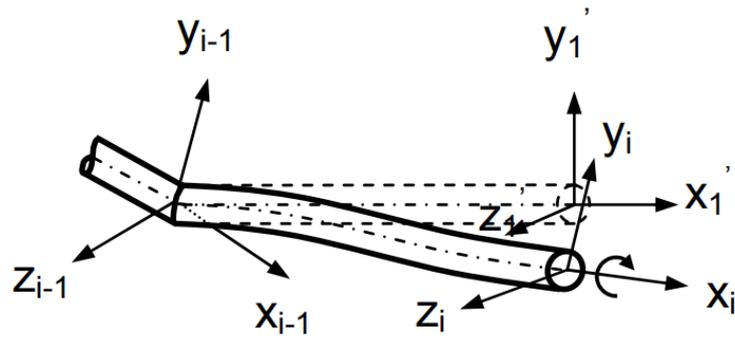


Figura 2. Sistema eslabón flexible [29].

La flexibilidad en el eslabón es considerada un comportamiento dinámico en donde la energía cinética colabora con la energía potencial elástica. La energía cinética se almacena en la inercia en movimiento y la energía potencial se almacena en los miembros flexibles. La flexibilidad se manifiesta en forma de oscilaciones mecánicas y deflexiones estáticas, lo que complica enormemente el control del movimiento de un brazo automatizado [32].

### 2.2.3 Parámetros de respuesta transitoria

Las características del funcionamiento de un sistema de control con respecto a la respuesta transitoria, se describen en el periodo temporal al momento de que el sistema es estimulado por una función escalón unitario desde el inicio, por otra parte se puede emplear una entrada escalón unitario con una magnitud diferente, además las respectivas condiciones iniciales son capaces de ser un punto cualquiera de operación de un sistema; también para que exista un comportamiento cuantificable, todos los bosquejos ingresados a comparación, deben introducirse a las mismas situaciones de funcionamiento [33].

En la figura (3) se observan las características de un sistema de control, el mismo que tiene una señal de referencia tipo escalón unitario, además posee condiciones iniciales nulas en la dimensión del tiempo, las oscilaciones corresponden a la respuesta temporal del sistema, posterior el sistema llega a un parámetro constante, donde comienza el estado estacionario de la señal [33]; en la tabla (2) se definen los parámetros de respuesta del sistema de control con cada una de sus definiciones.

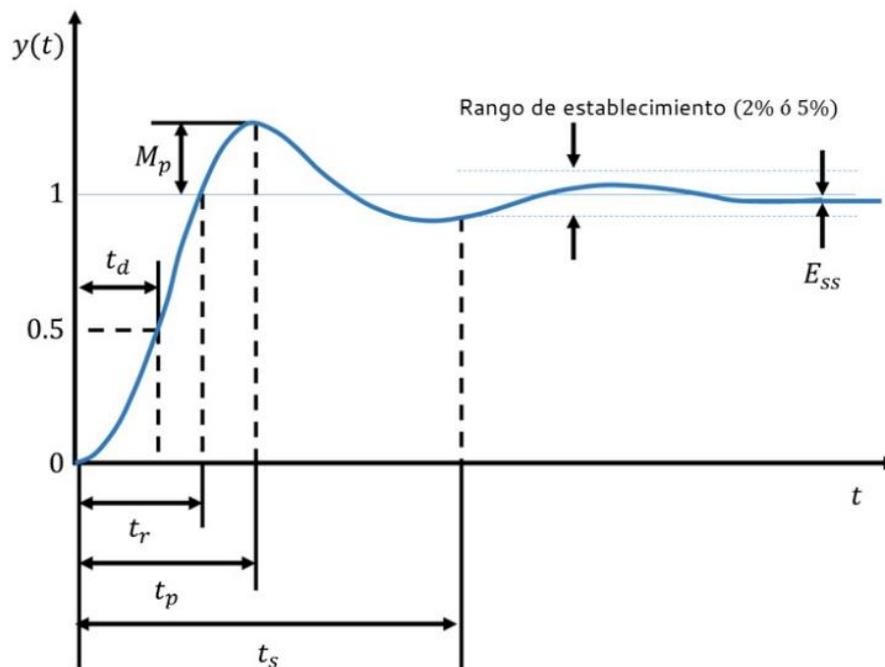


Figura 3. Respuesta transitoria frente a una señal de escalón unitario [33].

Tabla 2. Parámetros de respuesta transitoria [33]

Parámetro	Definición
Tiempo de retardo ( $t_d$ )	Indica el tiempo que tarda la señal de salida en llegar a un valor medio de la señal de referencia del sistema.
Tiempo de ascenso ( $t_r$ )	Hace referencia al tiempo que tarda la señal de salida resultante en acoplarse de un 10% a un 90% de valor de una señal escalón.
Tiempo máximo de respuesta ( $t_p$ )	Señala el periodo de tiempo que la señal de salida tarda en llegar desde su punto de partida hasta su valor máximo de perturbación
Porcentaje de sobreimpulso máximo ( $M_p$ )	Muestra el parámetro máximo de elongación que está por encima de la señal de referencia.
Tiempo de asentamiento ( $t_s$ )	Especifica el periodo de tiempo que necesita la señal de salida para poder llegar a un rango comportamiento similar al de la señal de referencia.

<b>Tiempo máximo de respuesta (<math>t_p</math>)</b>	Señala el periodo de tiempo que la señal de salida tarda en llegar desde su punto de partida hasta su valor máximo de perturbación.
<b>Error en estado estable (<math>E_{ss}</math>)</b>	Explica la diferencia entre la señal de entrada y la resultante cuando el sistema ha logrado el estado estacionario.

#### 2.2.4 Fundamentos del cálculo fraccionario

El cálculo fraccionario da la posibilidad de formular la integración y derivación de orden no entero. En el análisis del dominio temporal estos elementos de cálculo se desarrollan mediante la convolución, ya que se utilizan para detallar procesos de memoria en el dominio de Laplace, dichos operadores, son equivalentes al operador (1). La convolución indica un procedimiento natural de sistemas de comportamiento lineal y estables en el tiempo con un impulso determinado [34].

$$S^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Dentro del cálculo fraccionario se define la notación que es necesario para la representación de la integral y la derivada fraccionaria, que se muestra en las ecuaciones (2) y (3) [35].

$${}_b D_t^\alpha g(t) \quad (2)$$

$${}_b D_t^{-\alpha} g(t) \quad (3)$$

Donde:

- $b$  indica la condición inicial que tiene la derivada o la integral.
- $t$  es variable respecto a la cual se define la ecuación.
- $\alpha$  y  $-\alpha$  pertenece al exponente de la derivada y la integral fraccionaria, estos exponentes son números no enteros.
- $g(t)$  es la expresión matemática para integrar o derivar.

### 2.2.4.1 Funciones especiales

Dentro del cálculo fraccionario se definen dos funciones básicas que son la función Gamma y la función de Mittag-Leffler [35].

- **Función Gamma**

También conocida como función Euler – Gamma, hace referencia a la extensión del operador factorial a números no enteros, su representación se muestra en la ecuación (4) [35]:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (4)$$

Donde:

- $z$  = valor en que se calcula la función gamma.
- $t$  = parámetro de la integración.

Esta expresión matemática, para los números complejos o reales la convergencia será absoluta. Es empleada en calculo fraccionario para la explicación de las derivadas e integrales fraccionarias, cálculos de probabilidad y análisis de datos en cálculos combinatorios [35].

- **Función de Mittag-Leffler**

En la resolución de modelos dinámicos se aplica el proceso de solución uniforme y particular, donde existe una función exponencial en esta última, en su mayoría de los casos. Esta función Mittag-Leffler realiza el trabajo de función exponencial pero orientado al orden fraccionario y se lo define en la ecuación (5) como [35]:

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (5)$$

Donde:

- $z$  = parámetro de punto de evaluación
- $\alpha$  = Índice exponencial de la función

### 2.2.4.2 Forma ampliada de la derivada e integral

La función de una integral  $f(x)$  se puede estructurar como se indica en la ecuación (6) [35]:

$$D^{-1}f(x) = \int f(x)dx \quad (6)$$

No obstante, esta función se puede modificar indicando límites como indica la siguiente ecuación (7) [35]:

$$D^{-1}f(x) = \int_0^x f(t)dt \quad (7)$$

Como se indica en la zona izquierda de la figura (4), las restricciones de la ecuación (7) se encuentran definidos por el triángulo rojo. Se emplea el mismo método de aplicar límites a la integral de segundo orden, cuyo resultado se muestra en la siguiente ecuación (8) [35]:

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x \int_0^x f(t_1)dt_2dt_1 \quad (8)$$

En la zona izquierda de la figura (4), las restricciones de la ecuación (8) se encuentran definidas, desde el punto de origen al punto de la línea azul. Sin embargo, el área de la integral se puede modificar en la forma como indica la parte derecha de la figura (4), es decir comenzando en la parte del eje vertical hasta la línea azul, obteniendo una integral doble que se estructura de la siguiente manera en la ecuación (9) [35]:

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x \int_{t_1}^x f(t_1)dt_2dt_1 \quad (9)$$

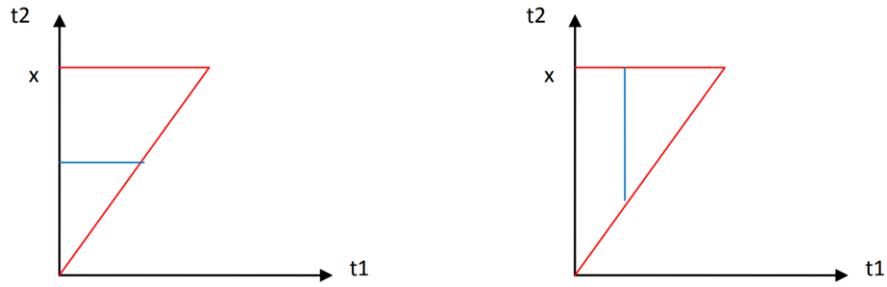


Figura 4. Región de integración para la integral generalizada [35].

Acorde con la ecuación (9), la función que se evalúa en  $f(t_1)$  se la puede extraer de la integral a la que pertenece como una constante, donde se obtiene la ecuación (10).

$$D^{-2}f(x) = \int_0^x f(t)(x-t)dt \quad (10)$$

Empleando este método para las integrales de orden superior, se obtiene las ecuaciones (11) y (12), para orden 3 y 4 respectivamente.

$$D^{-3}f(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f(t)(x-t)^2 dt \quad (11)$$

$$D^{-4}f(x) = \frac{1}{(3 * 2 * 1)} \int_0^x f(t)(x-t)^3 dt \quad (12)$$

Basándose en las ecuaciones (10), (11) y (12), es viable fijar una expresión para el  $n$ -ésimo orden entero para la integración, donde quedaría planteada la ecuación (13) como:

$$D^{-n}f(x) = \int_0^x \dots \int_0^x f(t) dt \dots dt_n \quad (13)$$

$$D^{-n}f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt$$

Si en la ecuación (13) se sustituye el orden entero de la derivada por un valor real negativa  $-\alpha$  y la función factorial se convierte en función gamma, de esta manera se obtiene una función integral que trabaja para diferentes tipos de orden que se ajuste a un valor negativo, como indica la ecuación (14) [35]:

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha-1}} dt \quad (14)$$

Tomando como referencia la ecuación (14), es posible estructurar una derivada general para el orden fraccionario. Debido a que se usa inicialmente la integral fraccionaria, y posterior se emplea una deriva de orden entero, ecuación (15) [35].

$$D^x = D^n D^{\alpha-n} f(x) \quad (15)$$

Donde:

$n$  = valor entero de alfa + 1.

### 2.2.4.3 Integral de orden fraccionaria

Considerando la ecuación (14), que fue determinada por Liouville para las restricciones de integración inferior cero, se presenta una edición generalizada para el arreglo de la integral en su valor  $\alpha$ -esimo, no obstante esta función no coincide para las condiciones que son mayores a cero, donde Riemman redefine la integral de Liouville en un límite inferior para un valor real positivo o negativo, como indica la ecuación (16), que representa la definición de Riemman - Liouville para la integral de orden fraccional [35].

$$D^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_b^x f(t)(x-t)^{\alpha-1} dt \quad (16)$$

Se reconoce a esta definición como una de las más empleadas en el cálculo fraccionario para las integrales de orden fraccional.

#### 2.2.4.4 Derivada de orden fraccionaria

Como se expresa en la sección anterior, la derivada de orden fraccional se fundamenta de la integral fraccionaria. El proceso para poder obtener esta expresión se basa en realizar primero una integración fraccionaria, y luego se deriva de manera entera. Partiendo de ese concepto la ecuación (16), Riemman define la función como la derivada de orden fraccional en la ecuación (17) [35]:

$$D^n f(x) = \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \frac{D^m}{D_t^m} \int_0^x f(t)(x - t)^{m+\alpha-1} dt \quad (17)$$

Donde:

- $\alpha$ : indica el orden fraccionario
- $f(x)$ : función objetivo
- $m$ : indica el orden de la derivada tipo entero que se determina en base a la inecuación  $m - 1 < \alpha < m$ .

#### 2.2.5 Control fraccionario

Al referirse a controladores y medidas de control, el controlador PID es uno de los principales mencionados debido a su simplicidad y facilidad de desarrollo, el mismo que utiliza un integrador y derivador para el control específico donde se esté aplicando [35]; por otra parte el controlador PID fraccionario es considerado un control mejorado del PID tradicional, debido a sus componentes adicionales que mejoran el comportamiento de un sistema.

##### 2.2.5.1 Controlador PID clásico

La aplicación de un control PID dentro de un sistema de control se puede llevar a cabo de diversas formas [36]:

- Como un controlador independiente.
- Como parte de un controlador digital directo.
- Como parte de un controlador jerárquico distribuido.

Desde una perspectiva matemática, tomando en consideración un sistema SISO

(simple input – simple output), para ajustar un sistema dinámico lineal por medio de una ecuación diferencial ordinaria, el control empleado en lazo cerrado que utiliza la señal de error se debe fundamentar por una ley de control como indica la ecuación (18) [36]:

$$u(t) = C + P(t) + I(t) + D(t) = C + k \cdot e(t) + k_i \cdot \int_0^t e(t)dt + k_d \cdot \frac{d}{dt} e(t) \quad (18)$$

Se definen los parámetros del control PID, como indica la tabla (3):

**Tabla 3.** Parámetros del control PID [35].

<b>Variable</b>	<b>Definición</b>
<b>C → Offset</b>	Parámetro que se puede considerar siempre nulo, cuando se establecen condiciones iniciales igual a cero.
<b>P(t) → Acción Proporcional</b>	Aumenta o reduce el error de control mediante una ganancia proporcional, $k$ .
<b>I(t) → Acción Integral</b>	Almacena en el transcurso del tiempo el error de control, que evalúa por medio del parámetro $k_i$ (ganancia integral).
<b>D(t) → Acción Derivativa</b>	Toma en cuenta de manera puntual el aumento del error de control, evaluado a través del parámetro $k_d$ (ganancia derivativa).

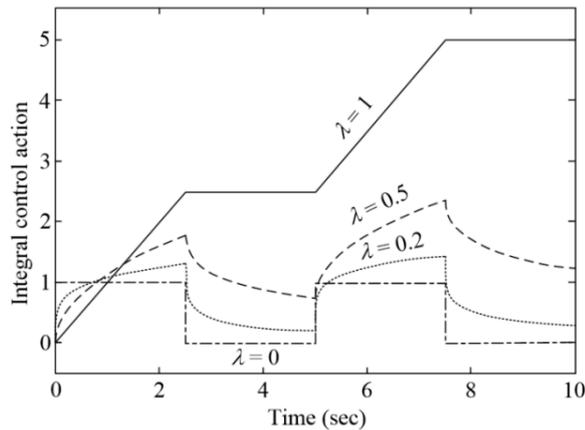
### 2.2.5.2 Parte integral del controlador

La función integral cumple la tarea de suprimir el error en el estado estacionario, pero retardando el tiempo de estabilización en el sistema y haciéndolo más inestable. Este tipo de comportamientos se observan en el dominio del tiempo en aumento del ajuste de tiempo, en la parte del plano complejo el desplazamiento de los polos en el semiplano derecho, en cambio en el dominio de la frecuencia se origina un aumento en la pendiente con una magnitud de 20 dB mientras que en la fase un incremento de 90° grados.

Para el análisis el comportamiento del orden fraccionario en la parte integral, se introduce una señal de error  $e(t)$  cuadrada y se estudia la acción de control  $u(t)$ , la misma que está definida en la siguiente ecuación (19):

$$U(t) = k \sum_{j=0}^N \frac{-1^j}{\Gamma(1-\alpha)} (t-jT)^{-\alpha} u_0(t-jT) \quad (19)$$

En la figura (5) se da a conocer el estudio de esta función para los valores fraccionarios  $\lambda = 0, 0.2, 0.5$  y  $1$ .



**Figura 5.** Acciones de control para diferentes valores fraccionarios [37].

El término  $\lambda$  indica el orden fraccionario de la parte integral, mientras que  $\mu$  es el orden fraccionario de la parte derivativa. La figura (5) indica los efectos de  $\lambda = 0, 0.2, 0.5$  y  $1$  en las señales de control [10]. Como se puede analizar estos efectos de los parámetros de control sobre la señal de error cambian entre los efectos de una acción proporcional ( $\lambda = 0$ , señal cuadrada) y una acción integral ( $\lambda = 1$ , curva de línea recta). Para cantidades intermedias de la acción de control, este se eleva para un error constante, lo que indica la eliminación del error en el estado estacionario, y se atenúa cuando el error es cero, indicando un sistema estable [37].

### 2.2.5.3 Parte derivativa del controlador

El componente derivativo tiene como principales beneficios la atenuación del ruido de frecuencia elevada y hace al sistema más estable. En el dominio del tiempo se interpreta como un aumento en el overshoot y un tiempo más reducido de estabilización. En el plano complejo los polos cambian de posición hacia el semiplano izquierdo, aproximándolos a la región de estabilidad y en el análisis de frecuencia suman 20 dB a la pendiente de la magnitud y  $90^\circ$  a la fase [35].

Para la parte de control derivativa, las repercusiones de la acción de control en la señal de error, se muestra en la figura (6), donde  $\mu = 0, 0.2, 0.5$  y  $1$ , respectivamente [10]. Como se ve en la figura mencionada, varía entre los parámetros de una acción proporcional ( $\mu = 0$ , señal trapezoidal) y una operación derivativa ( $\mu = 1$ , señal cuadrada). Para valores medios de  $\mu$ , la respuesta de control se ajusta a curvas intermedias, es decir, la acción de control cambia más suavemente. Es importante notar que, la acción derivativa no es cero para un error fijo y el comportamiento de la señal de control también se amortigua cuando existe una reducción en la señal de error, lo que conlleva una mejor atenuación a las señales de ruido con alta frecuencia [37].

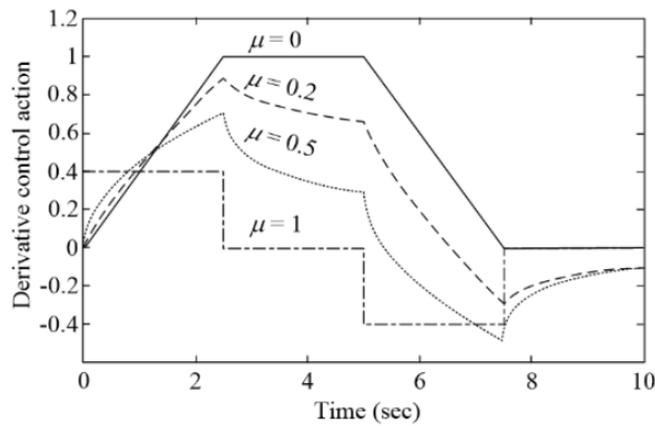


Figura 6. Acción de control derivativa [37].

#### 2.2.5.4 Controlador PID de orden fraccionario

Podlubny implemento por primera vez el control de PID de orden fraccional en [38], [39]. Este tipo de controlador se lo define como control  $PI^\lambda D^\mu$ . Posee un integrador fraccional de orden  $\lambda$  y un diferenciador fraccional de orden  $\mu$ , se lo puede describir de la siguiente manera, ecuación (20) [40]:

$$G(s) = k_p + \frac{k_i}{s^\lambda} + k_d s^\mu \quad (20)$$

El control FOPID generalizo el PID entero de la tal forma que:

- Si  $\lambda = 1$  y  $\mu = 1$ , entonces es un controlador PID clásico.
- Si  $\lambda = 0$  y  $\mu = 1$ , entonces es un controlador PD clásico.
- Si  $\lambda = 1$  y  $\mu = 0$ , entonces es un controlador PI clásico.
- Si  $\lambda = 0$  y  $\mu = 0$ , entonces es un controlador P clásico.

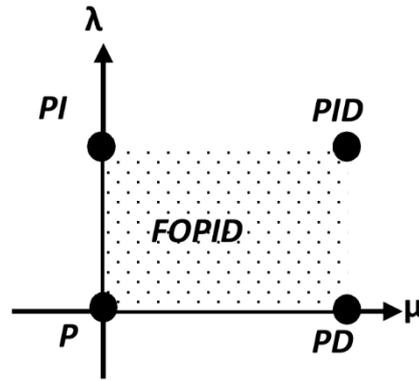


Figura 7. Espacio de control PID de orden fraccionario [40].

Si los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  se instituyeran en un parámetro arbitrario entre 0 y 1, el control se lo puede manipular para comportarse dentro de las cuatro opciones del espacio del control FOPID como indica la figura (7). El controlador FOPID es más flexible, pero también puede incrementar la complejidad en el proceso de sintonización [40].

### 2.2.6 Sintonización y optimización del control PID de orden fraccionario

Existen diferentes aspectos para el diseño de un controlador PID de orden fraccionario mediante optimización [41]:

- El tipo de sistema a controlar (orden entero o fraccionario).
- Parámetros de optimización.
- Parámetros de diseño del PID fraccional.
- Variables específicas a optimizar.
- Definición de parámetros iniciales del espacio de parámetros.

Se considera la simulación en el dominio del tiempo para la evaluación de las condiciones de optimización, donde la simulación puede depender de una metodología de orden fraccionaria o entera. Se tiene presente que la simulación en orden fraccionario es considerada lenta y/o ineficiente, donde es más factible emplear algoritmos de solución de ecuaciones diferenciales de orden entero que estén bien estructuradas. Donde se necesita una aproximación al sistema de orden fraccional y/o el control por medio de un sistema entero [41].

En conceptos de rendimiento y exactitud, un método de aproximación conveniente, basada en el rango de frecuencia, es el método recursivo del filtro de Oustaloup [42]. La aproximación del filtro Oustaloup a un diferenciador fraccionario  $G(s) = s^\alpha$  es utilizado en diferentes aplicaciones [10]. Un filtro Oustaloup se puede desarrollar como la ecuación (21):

$$G_t(s) = k \prod_{i=1}^N \frac{s + w'_i}{s + w_i} \quad (21)$$

Donde:

$$\begin{aligned} w'_i &= w_b (w_u)^{\frac{(2i-1-\alpha)}{N}} \\ w_i &= w_b (w_u)^{\frac{(2i-1-\alpha)}{N}} \\ K &= w_h^\alpha \\ w_u &= \sqrt{\frac{w_h}{w_b}} \end{aligned} \quad (22)$$

Esta aproximación está estructurada para frecuencias  $w \in [w_b, w_h]$  y  $N$  indica el orden de la aproximación. La ecuación se adapta a una serie de multiplicaciones de sucesión de sistemas lineales equilibrados de primer orden. La selección de un rango amplio de aproximación da como respuesta un  $w_u$  grande, y un  $N$  de orden superior da como resultado a un espaciamiento de polos que inicia desde  $-wh$  hasta aquellos muy próximos a  $-wh$ . Este intervalo es logarítmico con un agrupamiento cerca de  $-wh$  y ocasiona problemas en la discretización. Además, es beneficioso una banda ancha de aproximación, ya que esta se comporta de manera óptima en el interior del intervalo y no en su margen, por lo que se deben mantener ciertos límites [43].

En el diseño de controladores se consideran restricciones de optimización. Este tipo de especificaciones incluyen márgenes de ganancia  $G_m$  y margen de fase  $\phi_m$ , que pueden calcularse de la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema de bucle abierto, en el intervalo de frecuencias donde la aproximación es válida. Siguiendo los pasos de [10], se pueden considerar especificaciones adicionales de diseño que se enumeran a continuación, considerando la flexibilidad del controlador fraccional

obtenida al tomar en cuenta el dominio de la frecuencia [43]:

### 2.2.6.1 Atenuación de ruido de alta frecuencia

La limitación se emplea a la función de ganancia complementaria  $T(jw)$  como indica la siguiente ecuación (23):

$$\left| T(jw) = \frac{G_c(jw)G(jw)}{1 + G_c(jw)G(jw)} \right|_{dB} \leq A \text{ dB}, \quad (23)$$

$$\forall w \geq w_t \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow |T(jw_t)|_{dB} = A \text{ dB},$$

Donde A hace referencia a la disminución de ruido ideal para frecuencias  $W > W_t$  rad/s.

### 2.2.6.2 Rechazo de interferencias de salida

La limitación del indicador de sensibilidad  $S(jw)$  se lo puede definir como la ecuación (24):

$$\left| S(jw) = \frac{1}{1 + G_c(jw)G(jw)} \right|_{dB} \leq B \text{ dB}, \quad (24)$$

$$\forall w \geq w_s \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow |S(jw_t)|_{dB} = B \text{ dB},$$

Donde B indica el valor requerido de la función de sensibilidad para frecuencias  $W \leq W_s$  rad/s.

### 2.2.6.3 Robustez frente a cambios en la ganancia del sistema

Se establece una restricción como indica la formula (25):

$$\left. \frac{d \arg (F(s))}{dw} \right|_{w=w_{eq}} = 0, \quad (25)$$

Donde  $F(s) = G_c(s)G(s)$  es el sistema con retroalimentación,  $W_{cg}$  es la frecuencia critica alrededor de la cual la fase del sistema debe ser constante.

En definitiva, se puede tomar en cuenta una restricción al trabajo de control PID fraccional  $u(t)$ . Las condiciones para mejorar el rendimiento son las ganancias del

controlador  $PI\lambda D\mu$  y los componentes no enteros del integrador/diferenciador. Por lo tanto, el conjunto de elementos optimizados puede ser [41]:

$$\theta = [\theta_g \quad \theta_\epsilon]$$

$$\theta_g = [K_p \quad K_i \quad K_d], \quad \theta_\epsilon = [\lambda \quad \mu]. \quad (26)$$

De esta manera, están presentes tres posibilidades diferentes:

- Ajustar al máximo todos los parámetros.
- Ajustar específicamente las ganancias.
- Ajustar únicamente las componentes fraccionales.

Esto también nos orienta a una alternativa para obtener los parámetros iniciales para la optimización. Es viable, teniendo el conocimiento suficiente sobre la planta, emplear métodos de ajuste PID de orden entero para el ajuste de las ganancias, y posterior ajustar el controlador obteniendo las componentes fraccionales del integrador/diferenciador [41].

### 2.2.7 Herramientas de software

Actualmente hay diferentes herramientas informáticas que se encuentran a disposición para poder colaborar con los ingenieros en los temas de identificación, modelado, control y simulación de sistemas fraccionarios. Dentro de los softwares a poder utilizar son: @fotf, CRONE, Ninteger (Non-Integer) y el conjunto de herramientas FOMCON (Fractional Order Modeling and Control) [44]. En la tabla (4) se muestra las características más relevantes de cada una de las herramientas computacionales.

**Tabla 4.** Características de herramientas computacionales [18].

Herramienta	Aplicaciones/Módulos	Interfaz de usuario	Instrucción para abrir interfaz	Biblioteca de Simulink	Sistema con retardo
@FOTF	Evaluación y control de sistemas fraccionarios (Basada en objetos)	No	-	No	Si
CRONE Toolbox	Crone CSD: elaboración de sistemas de control de orden fraccionario	Si	crone_contr ol	No	No
	OOCrone: estudio de sistemas de orden	No	-	No	No

	fraccionario (basada en objetos)				
<b>FOMCON</b>	Análisis de sistemas fraccionarios	Si	Fomcon	Si	Si
	Diseño PID de orden fraccionarios	Si	Fpid		
	Refinamiento de PID fraccionarios	Si	Fpid_optim		
	Elaboración de PID clásicos para sistemas de orden fraccionario.	Si	Iopid_tune		
	Reconocimiento de sistemas fraccionarios (dominio en el tiempo y la frecuencia)	Si	Fotfid/fotfrid		
	Puesta en práctica de controladores de orden fraccionario (dominio de la frecuencia)	Si	impid		
<b>Ninteger</b>	Estudio de sistemas de orden fraccionario (rango de frecuencia)	No	ninteger	Si	Si
	Elaboración de controladores PID de orden fraccionarios y tipo CRONE.	Si			
	Reconocimiento de sistemas de orden fraccionario (dominio frecuencial)	No			

### 2.2.8 Diseño de controladores FOPID empleando herramientas computacionales

Para ajustar un controlador FOPID se plantea una agrupación de métodos tradicionales de ZN (Ziegler - Nichols), AH (Astrom – Hagglood), CC (Cohen - Coon), entre otros, y métodos de optimización como NM (Nelder Mead), IP (Interior Point), AS (Active Set), entre otros, donde se visualiza un mejor rendimiento de forma transitoria. Se selecciona un indicador de desempeño para poder modificar el índice de integración y diferenciación entre ellos, IAE, ISE, ITSE e ITAE. Como parte final se escoge una técnica de aproximación para estimar operadores no enteros [44]. En la figura (8) se observa el orden de los pasos para llevar este proceso de diseño.

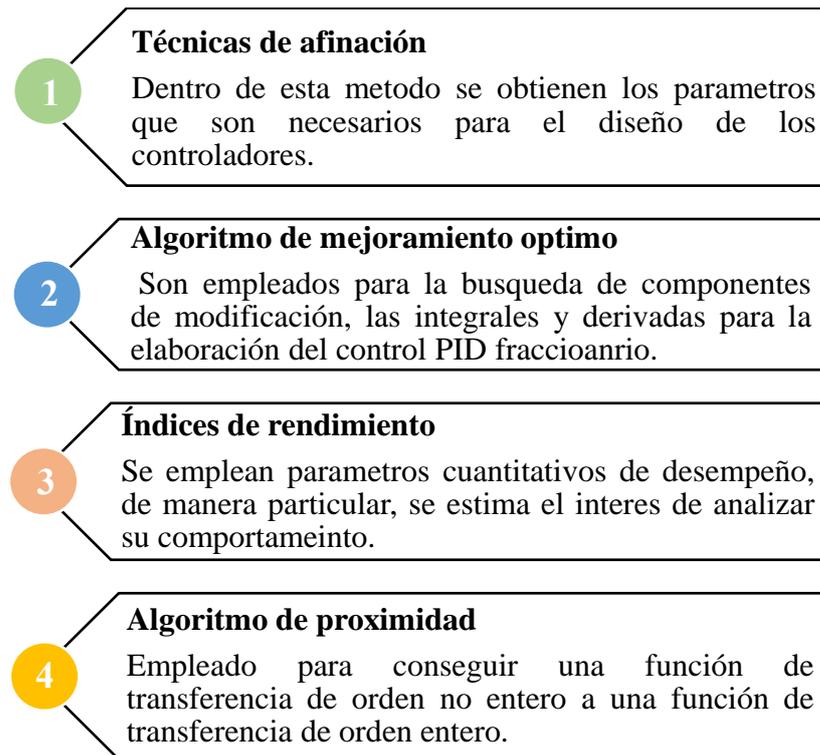


Figura 8. Pasos para la elaboración de control PID fraccionario [44].

### 2.2.8.1 Técnicas de sintonización

Las técnicas de regulación son el procedimiento para obtener diferentes valores de modificación para los controladores, entre los más reconocidos tenemos: Ziegler Nichols (ZN), Astrom-Hagglound (AMIGO), Cohen-Coon (CC) y Chien-Hrones-Reswick (CHR).

- **Ziegler Nichols**

Ziegler y Nichols plantearon reglas que permiten delimitar los parámetros  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  (ganancia proporcional, tiempo integral, tiempo derivativo), fundamentándose en las propiedades de respuesta temporal de una planta específica. Tal resolución de los valores de los controladores PID la pueden ejecutar los ingenieros en la planta a trabajar. Se disponen dos técnicas denominada reglas de sintonización de Ziegler – Nichols, las mismas que se presentan a continuación [9].

## 1. Primera técnica

En esta primera metodología, la respuesta a una entrada de paso unitario se consigue con un procedimiento experimental, como indica la figura (9). Si en la planta no existen integradores ni polos predominantes de forma compleja conjugada, el comportamiento ante el escalón unitario puede tener un comportamiento de tipo  $S$ , como también lo indica la figura (10). Esta metodología que trabaja en lazo cerrado, se puede emplear cuando el comportamiento de la curva muestra una respuesta en forma de  $S$ , la misma que describe dos parámetros importantes: constante de tiempo  $T$ , tiempo de retardo  $L$ , estos valores indicados se delimitan dibujando una recta que es tangente a la coordenada de inflexión en la curva con aspecto de  $S$ , estableciendo las intersecciones de la recta tangente con la línea temporal y la línea  $c(t)=k$ , como indica la figura (10) [9]. En la tabla (5) se muestran las proporcionalidades para el cálculo de los valores  $k_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$ .

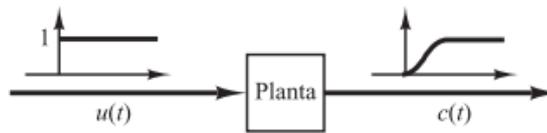


Figura 9. Comportamiento ante el escalón de una planta [9].

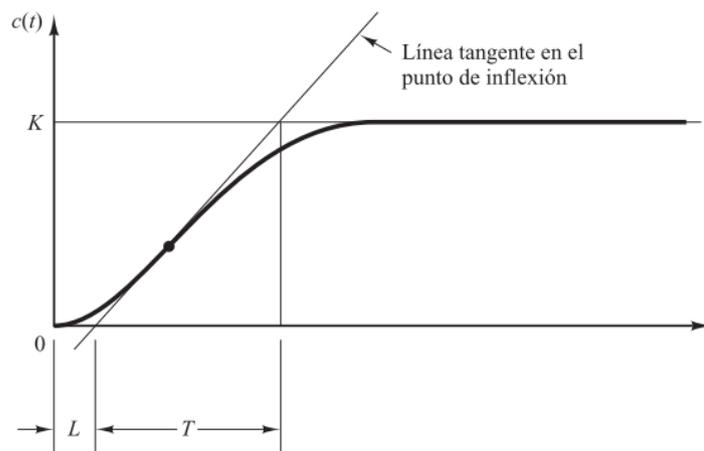


Figura 10. Comportamiento en forma de S [9].

**Tabla 5.** Método 1 de ajuste de Ziegler-Nichols en base a la respuesta del escalón [9].

Controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$\frac{T}{L}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.9 \frac{T}{L}$	$\frac{L}{0.3}$	0
<b>PID</b>	$1.2 \frac{T}{L}$	$2L$	$0.5L$

Para este método, la relación de transferencia  $\frac{C(s)}{U(s)}$  se estima por medio de un sistema de primer nivel con una tardanza de la siguiente forma:

$$\frac{C(s)}{U(s)} = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1} \quad (27)$$

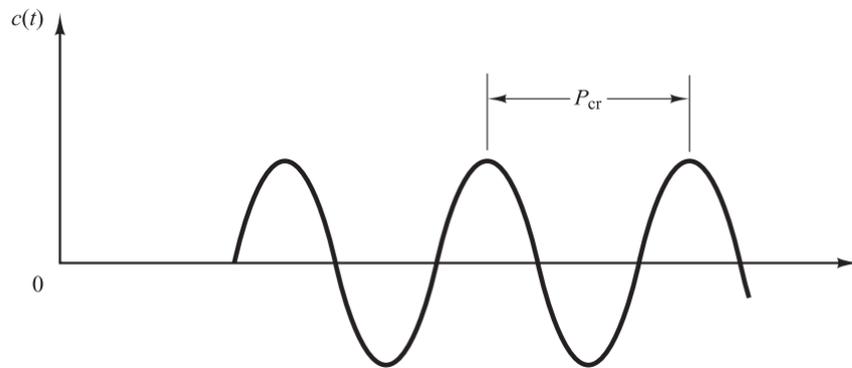
Los creadores Ziegler y Nichols propusieron constituir los valores de  $K_p, T_i$  y  $T_d$  conforme a la fórmula de la tabla (5). Se contempla que el control PID de forma ajustada con el primer método de las reglas mencionadas se obtiene:

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \\ &= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{2Ls} + 0.5Ls \right) \\ &= 0.6 \frac{\left( s + \frac{1}{L} \right)^2}{s} \end{aligned} \quad (28)$$

## 2. Segunda Técnica

Es considerado la segunda metodología, se fija primero  $T_i = \infty$  y  $T_d = 0$ . Tomando solo el comportamiento de control proporcional (Figura 11), se aumenta el valor de  $K_p$  partiendo desde 0 hasta observar un valor crítico  $K_{cr}$ , donde la finalización presente perturbaciones constantes. (Si no presenta perturbaciones sostenidas en la salida para un valor de  $K_p$ , esta metodología no puede ser aplicada). Es así, como la ganancia

de forma crítica  $K_{cr}$  y el termino  $P_{cr}$  haciendo referencia al periodo, se delimitan de forma experimental, como indica la figura (11). Ziegler y Nichols recomendaron que se establecieran valores para  $K_p$ ,  $T_i$  y  $T_d$  mediante las ecuaciones de la tabla (6) [9].



**Figura 11.** Oscilación repetida con ciclo repetitivo  $P_{cr}$  [9].

**Tabla 6.** Regla de Ziegler-Nichols (Segundo Método) [9].

Tipo de controlador	$K_p$	$T_i$	$T_d$
<b>P</b>	$0.5K_{cr}$	$\infty$	0
<b>PI</b>	$0.45K_{cr}$	$\frac{1}{1.2}P_{cr}$	0
<b>PID</b>	$0.6K_{cr}$	$0.5P_{cr}$	$0.125P_{cr}$

Mediante el control PID utilizando la segunda metodología, produce las siguientes ecuaciones para el cálculo:

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (29)$$

$$= 1.2 \frac{T}{L} \left( 1 + \frac{1}{0.5 P_{cr} s} + 0.125 P_{cr} \right) \quad (30)$$

$$= 0.075 K_{cr} P_{cr} \frac{\left( s + \frac{4}{P_{cr}} \right)^2}{s} \quad (31)$$

#### ▪ Cohen – Coon

La metodología de calibración de Cohen – Coon se emplea sobre todo para sobrepasar la respuesta tardía y estabilizada que se crea en la técnica de Ziegler – Nichols. Esta táctica es para modelos o sistemas de orden uno, los mismo que poseen una demora de tiempo, debido a que el control no da respuestas automáticas a las perturbaciones [45].

Es una metodología con ambiente de prueba que cuando se encuentra en un estado estable permite ingresar una variación de pasos en su inicio, posteriormente considerando el parámetro de tiempo y de retraso de tiempo, se puede realizar el cálculo a la salida y también a los parámetros iniciales de control por medio de la respuesta. Para conseguir el equilibrio mínimo y la proporción de la reducción estándar, existe una disposición de ajustes predeterminados para este método mencionado [44].

**Tabla 7.** Cálculo de parámetros  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  mediante Cohen-Coon [45].

Control	$K_p$	$K_i$	$K_d$
<b>PID</b>	$\left(\frac{P}{NL}\right) * \left(1.33 + \left(\frac{R}{4}\right)\right)$	$L * \left(\frac{P}{NL}\right) / \left(1.33 + \left(\frac{R}{4}\right)\right)$	$0.5\tau_{dead}$
<b>PI</b>	$\left(\frac{P}{NL}\right) * (0.9 + (12))$	$L * \left(\frac{P}{NL}\right) / \left(1.33 + \left(\frac{R}{4}\right)\right)$	$\frac{4L}{(11 + 2R)}$
<b>P</b>	$\left(\frac{P}{NL}\right) * \left(1 + \left(\frac{R}{3}\right)\right)$		

Donde,

$P$  es el valor de porcentaje de la entrada,

$N$  es el cambio de porcentaje de salida/ $\tau$ ,

$L$  es  $\tau_{dead}$

$R$  es  $(\tau_{dead}/\tau)$

En la tabla (7), se deducen los valores de ganancia proporcional, integral y derivativa ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ), los mismos que se pueden obtener utilizando la técnica de Cohen – Coon. El procedimiento para esta técnica es el siguiente:

1. Esperar a que el método en su totalidad obtenga un estado estable.
2. La función de escalón unitario se debe introducir como una señal de entrada.
3. El parámetro constante de orden uno estimada con el parámetro constante de tiempo  $\tau$  que se retarda en  $\tau_{dead}$  unidades se fundamentan en la salida, en el instante en que se introduce la función escalón. Al reconocer las instancias de periodo de tiempo, es posible determinar el valor de  $\tau$  y  $\tau_{dead}$ ,  $t_0$  = posición inicial del escalón,  $t_2$  = periodo de punto medio y  $t_3$  = periodo de duración 63.2%.

4. Determine las características de proceso  $\tau$ ,  $\tau_{dead}$  y  $\left(\frac{P}{NL}\right)$  empleando el estudio realizado en,  $t_0, t_2, t_3, A$  y  $B$ .
5. Por encima de la base de  $\tau$  y  $\tau_{dead}$ ,  $\left(\frac{P}{NL}\right)$  es posible determinar los valores del control.

Los puntos a favor de la metodología de Cohen – Coon son que el tiempo de respuesta del periodo cerrado es rápido y se puede emplear en los sistemas con demora de tiempo. A la vez las desventajas de esta metodología son que solo pueden emplearse para sistemas de orden uno, los mismos que poseen un gran retardo de operación, es considerado una metodología fuera de línea, los esquemas de circuito completo son de forma inestable, donde el valor de  $\tau$  y  $\tau_{dead}$ ,  $K_0$  es capaz de no ser necesario ni preciso para otros tipos de sistemas [45].

- **Astrom – Hagglound (AMIGO)**

Esta metodología denominada AMIGO (Método estimado de sintonización de ganancia integral M), hace referencia al valor estimado para finalizar el procedimiento en un formato simple, esta metodología brinda una técnica muy parecida a la de ajuste de Ziegler – Nichols y se expone en las ecuaciones (32) – (34) [46].

$$K_p = \frac{1}{K} \left( 0.2 + 0.45 \frac{T}{L} \right) \quad (32)$$

$$K_i = \frac{(0.4L + 0.8L)}{L + 0.1T} * L \quad (33)$$

$$K_0 = \frac{0.5T}{0.3L + L} \quad (34)$$

- **Chien–Hrones–Reswick**

La metodología modificada de Ziegler – Nichols se la denomina Chien–Hrone–Reswick. Dentro de las aplicaciones de manejo de procesos, esta metodología brinda un mejor procedimiento para escoger el compensador. Existen dos métodos de CHR que son Chien–Hrone–Reswick (control de punto de configuración) denominada CHR1 y Chien–Hrone–Reswick (repulsión de perturbaciones) denominada CHR2. Este tipo de sintonización se desarrolló en el año de 1952 por Chien–Hrone–Reswick. Los parámetros de control de este método se mantienen sintonizados en cada uno de los procedimientos

industriales. Estos valores de control para el método de sobreimpulso del 0% como también 20% se lo expresa en la tabla (8) y (9) [46].

**Tabla 8.** CHR1 Método de cálculo  $K_p, K_i$  y  $K_d$  [46].

Sobreelongación	0 %			20%		
Controlador	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$K_p$	$K_i$	$K_d$
<b>PID</b>	$\frac{0.6}{a}$	$T$	$0.5L$	$\frac{0.95}{a}$	$1.4T$	$0.47L$
<b>PI</b>	$\frac{0.35}{a}$	$1.2T$		$\frac{0.6}{a}$	$T$	
<b>P</b>	$\frac{0.3}{a}$			$\frac{0.7}{a}$		

**Tabla 9.** CHR2 Método de cálculo  $K_p, K_i$  y  $K_d$  [46].

Sobreelongación	0 %			20%		
Controlador	$K_p$	$K_i$	$K_d$	$K_p$	$K_i$	$K_d$
<b>PID</b>	$\frac{0.95}{a}$	$2.4T$	$0.42L$	$\frac{0.12}{a}$	$2L$	$0.42L$
<b>PI</b>	$\frac{0.6}{a}$	$4T$		$\frac{0.7}{a}$	$2.3L$	
<b>P</b>	$\frac{0.3}{a}$			$\frac{0.7}{a}$		

### 2.2.8.2 Algoritmos de optimización

Son empleados para poder conseguir una función de transferencia cercana de orden fraccionario a un orden unitario. Cada metodología tiene sus respectivas propiedades, entre las más destacadas están: Nelder Mead (NM), Interior Point (IP) y Sequential Quadratic Programming (SQP).

- **Nelder Mead**

Nelder y Mead establecieron una metodología más sencilla para poder determinar un mínimo local de una función de distintas variables en 1965 [47]. Cuando hay dos variables, un simplex es considerada una metodología de búsqueda de patrones que realiza una comparación de parámetros de funciones en los tres vértices de un triángulo. El vértice más desfavorable, donde  $f(x, y)$  es mayor, se descarta y se sustituye con un nuevo vértice. Se construye un nuevo triángulo y se da continuidad a la búsqueda. El

procedimiento genera una secuencia de triángulos (puede incluir diferentes formas), donde los parámetros de la función en los vértices cada vez toman una forma más pequeña. El tamaño de los triángulos se reduce y da como resultado coordenadas del punto mínimo [48].

- **Interior Point**

También es denominado metodología de barrera, agiliza la evaluación de los sistemas lineales y no lineales de la potenciación convexa. Además, permite satisfacer una serie de restricciones que limitan el espacio de soluciones posibles convirtiendo una serie de problemáticas en una sucesión de problemas más simples. La ecuación que transforma el problemas original en uno aproximada es [49]:

$$\min_x f(x) \text{ sujeto a } h(x) = 0 \text{ y } g(x) \leq 0 \quad (35)$$

El problema estimativo, ecuación (36), para todo  $\mu = 0$ :

$$\begin{aligned} \min_{x,s} (x, s) f_u(x, s) &= \min_{x,s} f(x) - \mu \sum_i \ln(S_i), \text{ condicionado a} \\ h(x) &= 0 \text{ y } g(x) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Al haber condiciones de disparidad de  $g$ , se mantienen presentes las mismas cantidades de variables de holgura. Los  $S_i$  están restringidos a ser positivos para conservar  $\ln(S_i)$  limitado. Cuando el parámetro  $\mu$  se aproxima a cero, el valor mínimo de  $f_u$  tendría que acercarse al valor mínimo de  $f$ . El parámetro logarítmico incluido se designa como función de barrera. La fórmula (35) de la problemática estimada es un planteamiento del problema de concordancia obligada. Tiene una resolución más simple que la ecuación (36) de la problemática original de la inestabilidad [49].

Para solucionar la problemática estimada, el programa emplea una de las dos clases principales de fundamentos en cada una de las repeticiones, el primero hace referencia al paso directo en  $(x, s)$  distinguido como proceso de Newton. Este proceso se empeña por entender las afirmaciones matemáticas KKT (Karush–Kun-Tucker) para el problema aproximado por medio de una apreciación directa. El segundo principio hace referencia al gradiente conjugado que emplea una región de confianza. De forma natural, este programa se dedica por un progreso directo; en caso no pueda, se intenta el paso

secundario, el de gradiente conjugado. En cada repetición, el programa reduce una operación de legitimidad [49].

- **Sequential Quadratic Programming (SQP)**

Programación cuadrática Secuencial (SQP), es considerada una de las técnicas más sobresalientes de programación no lineal. Schittkowski ha renovado y validado una estrategia de sobrepasar los límites de las otras técnicas empleadas respecto a la competencia, la exactitud y la rapidez en la resolución efectiva en numerosos cuestionamientos [49].

Seleccionando las ecuaciones (37) - (40):

$$\min_x f(x) \tag{37}$$

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x^*) = 0 \tag{38}$$

$$\lambda_i G_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m_e \tag{39}$$

$$\lambda_i \geq 0, i = m_e + 1, \dots, m \tag{40}$$

El impulso principal es la característica de una incidencia menor de programación cuadrática considerando una estimación cuadrática de la expresión matemática de Lagrange [49].

$$L(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i G_i(x) \tag{41}$$

Considerando que las condiciones relacionadas se han notificado como condiciones de desigualdad. Se obtiene la ecuación (41) que es el problema secundario de programación cuadrática para las condiciones no lineales. El algoritmo SQP se aplica utilizando tres fases que son modificación de la matriz de Hesse, solución de optimización cuadrática y la función de exploración de trazos y de mérito [49].

### 2.2.8.3 Métricas de desempeño

Un sistema de control emplea medidas cuantificables de desempeño, donde se emplean medidas de cuantificación de desempeño, que están vinculadas con el desarrollo total de los indicadores de proceso. Se considera de manera particular el estudio de la

conducta del error de control  $e(t) = r(t) - y(t)$ , donde  $r(t)$  es el punto de referencia a seguir e  $y(t)$  la señal de salida del sistema, y manejo de control  $u(t)$  del sistema; donde por medio de cada una de estas señales se originan diferentes métricas de desempeño que cuantifican el movimiento dinámico del sistema [33]. Se presentan a continuación las métricas de desempeño más empleadas en la cuantificación del comportamiento dinámico de un sistema de control:

- **IAE**

“Integral Absolute Error” (IAE), es una métrica de desempeño que estima de manera semejante los parámetros de error para cuantificar el funcionamiento en tiempo real del sistema, trabaja solo en módulo [33]. Se define en la ecuación (42):

$$IAE = \int_0^t |e(t)| dt \quad (42)$$

- **ISE**

“Integral Square Error” (ISE) hace referencia a la integración de la señal de error elevada al cuadrado, mediante este método en comparación con el índice IAE, los valores de error en gran dimensión tienen mayor impacto en la cuantificación que los valores de error con poca magnitud [33]. Su definición se expresa en la ecuación (43):

$$ISE = \int_0^t e(\tau)^2 d\tau \quad (43)$$

- **ITAE**

“Integral Time Absolute Error” o integral absoluta del error ponderada por el tiempo, evalúa el rendimiento del sistema de control considerando el tiempo la medida absoluta del error; es decir a medida que progresa el tiempo, más relevancia tienen las pruebas de error para la evaluación del desempeño [33]. Se define por la ecuación (44):

$$ITAE = \int_0^t \tau |e(\tau)| d\tau \quad (44)$$

- **ITSE**

“Integral Time Square Error” (ITSE) o integral del error cuadrático evaluado en función del tiempo, es considerado una combinación entre las métricas ISE e ITAE; donde también se evalúa según el tiempo, pero también al error elevado al cuadrado. De esta forma un error de gran valor pasado un tiempo estimado, penaliza en gran medida el indicador de rendimiento [33]. Se define en la ecuación (45):

$$IITSE = \int_0^t \tau e(\tau)^2 d\tau \quad (45)$$

#### 2.2.8.4 Algoritmos de aproximación

Hay diferentes metodologías de aproximación empleados para poder obtener una función de transferencias fraccionaria a una función de transferencia de orden entero. Entre los más fundamentales tenemos, los que se describen a continuación:

- **Crone**

Este algoritmo puede acercarse de forma permanente al operador fraccionaria  $s^\alpha$ , esta asignación modifica los polos y ceros en el rango elegido de forma previa, donde se pueden crear sistemas de transferencia donde la ganancia cambie de manera lineal con el logaritmo de la frecuencia y con magnitud de fase casi estable en el interior de un rango definido  $w_1, w_n$ . La aproximación a la función de transferencia se expresa por la ecuación (46) [18].

$$G(s) = s^\alpha = C_0 \prod_{n=1}^N \frac{1 + \frac{s}{W_{sm}}}{1 + \frac{s}{W_{pm}}} \quad (46)$$

- **Matsuda**

Fue propuesta por los autores Matsuda y Fuji (1993), hace referencia a una estimación entera, mediante una expresión matemática racional conseguida en una extensión de fracciones continuas, se lo expresa en la ecuación (47). Sus parámetros convergen con la expresión original en una agrupación de puntos logarítmicos espaciados [18].

$$G(s) = a_0 + \frac{s - w_0}{a_1 + \frac{s - w_1}{a_2 \frac{s - w_2}{a_2 + \dots}}} + a_0 + \frac{s - w_0 s - w_1 s - w_2}{a_1 + a_2 + a_3 + \dots} \quad (47)$$

▪ **Carlson**

Planteada por los autores Carlson y Halijak (1964), brinda estimaciones de manera continua de las magnitudes fraccionarias. Esta metodología se define en la ecuación (50), trabaja para valores de  $1/\alpha \in \mathbb{Z}$ , de manera que,  $\alpha$  solo puede utilizar cantidades como  $1/2, 1/4$ , entre otros [18].

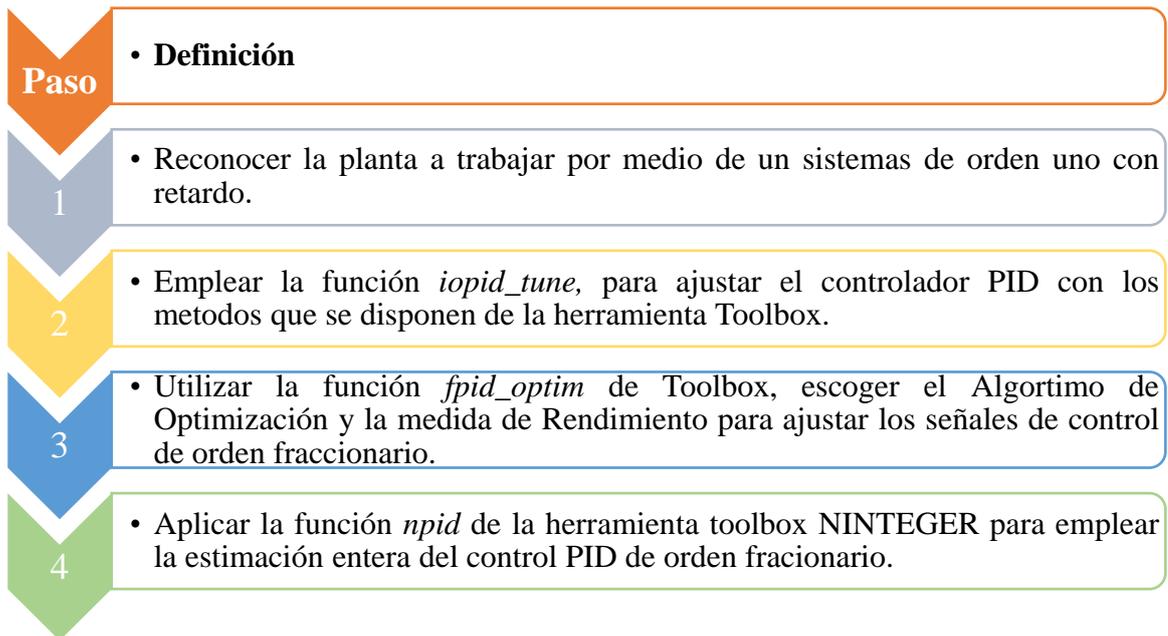
$$G^{\frac{1}{\alpha}}(s) = s \quad (48)$$

$$G_0(s) = 1 \quad (49)$$

$$G_i(s) = G_{i-1}(s) \frac{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) G_{i-1}^{\frac{1}{\alpha}}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s}{\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) G_{i-1}^{\frac{1}{\alpha}}(s) + \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) s} \quad (50)$$

**2.2.8.5 Algoritmo para el diseño de controladores fraccionarios**

El procedimiento para llevar a cabo el diseño de controladores fraccionarios se indica en la figura (12) [44].



**Figura 12.** Algoritmo para el diseño de controles fraccionarios [44].

## 2.3 MARCO TEORICO

En la sección correspondiente al marco teórico se presentan diversos documentos investigativos, que han sido analizadas de tal manera que se usen como guía en relación con la presente propuesta de titulación.

En el trabajo de titulación “DISEÑO, IMPLEMENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DESEMPEÑO DE UN CONTROLADOR PID DE ORDEN FRACCIONARIO (FOPID) APLICADO A CONTROL EMBEBIDO DE SISTEMAS MECATRÓNICOS” realizado por Macas Peña Edwin Stalin y Sarango Chamba Roger Augusto en la Universidad Técnica particular De Loja, en el año 2017, donde plantea la implementación de un controlador PID fraccional para la regulación de velocidad de articulación de codo de un prototipo robótico [50].

En la tesis doctoral “NUEVAS TÉCNICAS PARA EL CONTROL DE ROBOTS FLEXIBLES CON CARGA VARIABLE” realizada por Víctor Hugo Jaramillo Velásquez en la Universidad de Castilla – La Mancha en el año 2016 en España donde se plantea técnicas de control robustas orientada a robots flexibles [4].

En el libro “FLEXIBLE ROBOT DYNAMICS AND CONTROLS” realizado por Rush D. Robinett III, Clark Dohrmann, G. Richard Eisler, John Feddema, Gordon G. Parker, David G. Parker, David G. Wilson y Dennis Stokes en la Universidad de Binghamton en el año 2002 en la ciudad de Nueva York, donde plantea varias disciplinas orientadas a la dinámica estructural, identificación de sistemas, optimización y teorías de control, orientado a robot con flexibilidad [5].

En el libro “FRACTIONAL MODELING AND CONTROLLER DESIGN OF ROBOTIC MANIPULATORS”, realizado por Abhaya Pal Singh, Dipankar Deb, Himanshu Agrawal y Valentina E. Balas por la editorial Springer en el año 2021, donde detalla modelados de orden fraccional de sistemas robóticos, orientados a varias clases de manipuladores robóticos, además de respectivas comparativas con otros controladores [6].

En el libro “PID CONTROL IN THE THIRD MILLENNIUM” realizado por Ramon Vilanova y Antonio Vsioli por la editorial Spriniger en el año 2012, donde detalla el avance de los controles industriales en los últimos años, diferentes aspectos d PID y su implementación [7].

En el artículo científico “OPTIMIZATION OF Q AND R MATRICES WITH GENETIC ALGORITHMS TO REDUCE OSCILLATIONS IN A ROTARY FLEXIBLE LINK SYSTEM” realizado por Carlos Alberto Saldaña Enderica, José Ramón Llata y Carlos Torre-Ferrero en la Universidad de Cantabria en el año 2024, donde se detallan análisis de técnicas de control robustas para sistemas robóticos con eslabón flexible [8].

## CAPITULO III

### 3. DESARROLLO

Este capítulo se desarrolla la investigación del modelamiento matemático de los sistemas flexibles en articulación y eslabón, desarrollo de la unión de ambos sistemas dinámicos, linealización en espacio de estados, control PID de forma heurística aplicado al sistema flexible, PID fraccionario aplicado al sistema flexible para optimización, evaluación del comportamiento del control PID fraccionario aplicado a la dinámica del sistema flexible y comportamiento de la oscilación ven la punta del sistema flexible con el control aplicado.

#### 3.1 Componentes de la propuesta

Se hace referencia a la parte lógica, el software que se utilizara en el desarrollo de la investigación, donde se señala las características importantes para el análisis de sistemas dinámicos.

##### 3.1.1 Componentes lógicos

###### 3.1.1.1 Software MATLAB© Simulink

El programa expone utilidades particulares ante otros programas matemáticos, como una interfaz interactiva y una serie de librerías, donde cada una posee bloques de manera personalizada, que posibilitan simular, poner en práctica y verificar un conjunto de sistemas con parámetros temporales. Por otra parte, MATLAB© Simulink esta incorporado en MATLAB©, donde es posible acceder a una variedad de herramientas que facilitan el desarrollo de algoritmos, análisis y visualización de simulaciones [51].

###### 3.1.1.2 Herramienta computacional FOMCON

La herramienta FOMCON de MATLAB©, considerada como una caja de herramientas, brinda una interfaz gráfica de usuario (GUI), con funciones necesarias y medios de identificación de modelos como en el dominio del tiempo y de la frecuencia, además del diseño y la optimización de un controlador PID de orden fraccionario y un conjunto de bloques en Simulink [52]. La relación de FOMCON con otras herramientas en el cálculo fraccionario de MATLAB© se la puede observar en la figura (13).

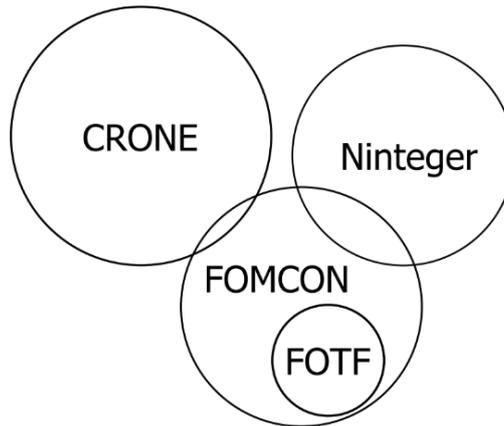


Figura 13. Relación de FOMCON y otras herramientas de cálculo fraccionario [52].

### 3.2 Diseño de la propuesta

En este fragmento de la investigación se presenta la parte teórica de la cada uno de los sistemas con los que se desarrolló la propuesta, se incluyen las ecuaciones dinámicas, simulaciones, análisis de sus comportamientos dinámicos, diseño de control y evaluaciones del controlador aplicado a la dinámica del sistema.

#### 3.2.1 Modelado matemático servomotor

La ley de voltaje de Kirchoff indica que, la sumatoria algebraica de cada uno de los voltajes alrededor en un circuito cerrado es igual a cero, para este circuito aplicando LVK dentro de lazo que incluye la tensión o voltaje  $v(t)$ , la resistencia eléctrica en el motor  $R_m$ , la inductancia en el motor  $L$ , y la fuerza electromotriz  $e(t)$ , se obtiene la ecuación (51) que expresa el comportamiento matemático del sistema eléctrico:

$$v(t) = R_m i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (51)$$

El par resultante del sistema mecánico  $\tau(t)$  ecuación (52), está conformado por un par generado de manera interna por el motor eléctrico  $\tau_m$ , y un parámetro de relación que representa la caja de cambios  $k_g$ .

$$\tau(t) = k_g \tau_m \quad (52)$$

El torque  $\tau_m$  generado por el motor, se relaciona de forma proporcional a la corriente  $i(t)$  que circula a través de él y la constante de torque  $k_t$ , ecuación (53):

$$\tau_m = k_t i(t) \quad (53)$$

$e(t)$  es la fuerza contraelectromotriz, ecuación (54) y está dada por:

$$e(t) = k_m \dot{\theta}(t) \quad (54)$$

Al introducir una caja de cambio con una relación  $k_g$ , el voltaje aplicado al motor  $e(t)$  se modifica, ecuación (55):

$$e(t) = k_m k_g \dot{\theta}(t) \quad (55)$$

Introduciendo una eficiencia de la caja de cambios  $n_g$  y una eficiencia en el motor  $n_m$ , la correspondencia entre el motor  $\tau_m(t)$ , la corriente  $i(t)$  que circula a través de él y la constante de torque  $k_t$ , se modifican quedando la ecuación (56):

$$\tau_m(t) = n_g n_m k_t i(t) \quad (56)$$

Al reemplazar cada una de las proporcionalidades en la ecuación (51), se obtiene la relación del torque con el voltaje aplicado, ecuación (57):

$$v(t) = R_m i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (51)$$

$$v(t) = \frac{\tau_m(t) R_m}{n_g n_m k_t} + L \frac{di(t)}{dt} + k_m k_g \dot{\theta}(t) \quad (57)$$

Se desprecia la parte inductiva en la ecuación (57), debido a que su magnitud es muy pequeña en relación con los otros parámetros, quedando la ecuación (58):

$$v(t) = \frac{\tau_m(t) R_m}{n_g n_m k_t} + k_m k_g \dot{\theta}(t) \quad (58)$$

Despejando la variable de interés  $\tau_m(t)$ , se obtiene la ecuación (59):

$$\tau_m(t) = \frac{n_g n_m k_t}{R_m} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m k_g}{R_m} \dot{\theta}(t) \quad (59)$$

Reemplazamos en el par resultante del sistema donde  $\tau(t) = k_g \tau_m$ , y obtenemos la ecuación (60):

$$\tau(t) = \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \dot{\theta}(t) \quad (60)$$

En las investigaciones dadas en [53] se obtiene la ecuación (60), que representa la dinámica de un servomotor, que es utilizada para sistemas con flexibilidad en articulación y eslabón, donde  $\dot{\theta}(t)$  es la velocidad angular de la parte inicial del eje del motor y  $\tau(t)$  el torque del motor. En la tabla (10), se muestran los parámetros de la ecuación (60):

Tabla 10. Parámetros del servomotor [54]

VARIABLES	DESCRIPCIÓN	VALOR	UNIDADES
$n_g$	Eficiencia de la caja de cambios.	0.9	-
$n_m$	Eficiencia del motor	0.69	-
$k_t$	Constante del torque del motor	$7.68 \times 10^{-3}$	Nm
$k_g$	Relación de caja de cambios	70	-
$R_m$	Resistencia de la armadura del motor	2.6	$\Omega$
$k_m$	Constante contraelectromotriz	$7.68 \times 10^{-3}$	V/(rad/s)

### 3.2.2 Modelado matemático articulación flexible

Dada la investigación [54], se procede a la identificación de los parámetros para este sistema (figura 14), cuyas variables son descritas (tabla 11):

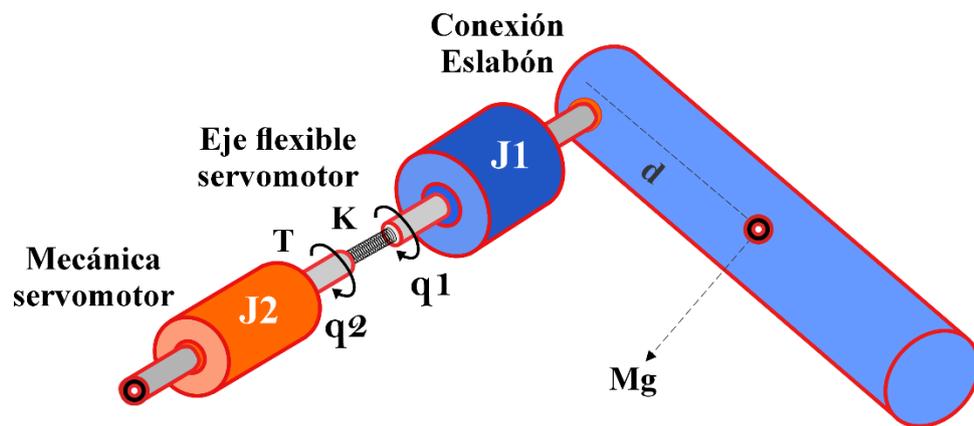


Figura 14. Variables dinámicas articulación flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Tabla 11.** Parámetros articulación flexible [54]

<b>Variables</b>	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
$J_1$	Momento de inercia rotacional del eslabón (rígido) conectado al motor en la punta del eje.	1	$kg \cdot m^2$
$m$	Masa que está conectada al eje del motor (eslabón).	1	$kg$
$g$	Aceleración gravitacional.	10	$m/s^2$
$d$	Longitud del eslabón.	0.5	$M$
$k$	Constante de rigidez de la articulación flexible entre $\theta_1$ y $\theta_2$ .	14	$N \cdot m \cdot s/rad$
$J_2$	Momento de inercia rotacional en la parte inicial del eje del motor.	0.3	$kg \cdot m^2$
$B$	Constante contraelectromotriz	0.001	$N \cdot m \cdot s/rad$

El modelamiento en la articulación flexible se lo lleva a cabo como un resorte de torsión uniforme [55]. Empleando la ecuación de Euler Lagrange, se puede desarrollar las ecuaciones de movimiento de un sistema electromecánico. La energía cinética total ( $PE$ ) se puede escribir como las ecuaciones (61) y (62) [54]:

$$KE = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{q}_2^2, \quad (61)$$

$$PE = mgd(1 - \cos q_1) + \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2, \quad (62)$$

El eslabón que se conecta el eje final del servomotor se comporta como una carga puntual, donde los parámetros  $q_1$  y  $q_2$  son ángulos de posición del eslabón y eje del motor de manera respectiva, en cambio  $J_1$  y  $J_2$  son valores que corresponden a la inercia del eslabón y del motor en ese orden. La ecuación (63) de Lagrange es [54]:

$$L = KE - PE \quad (63)$$

Usando las ecuaciones (61) y (62), se puede reescribir la ecuación (63) como:

$$L = \frac{1}{2}J_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{q}_2^2 - mgd(1 - \cos q_1) + \frac{1}{2}k(q_1 - q_2)^2 \quad (64)$$

Las ecuaciones matemáticas lagrangianas de movimiento con respecto al ángulo de posición del motor y del eslabón se pueden escribir como [54]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \quad (65)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L}{\partial q_2} = \tau - B\dot{q}_2, \quad (66)$$

Mientras que el torque producido en la ecuación (66) es donde se encuentra la corriente de armadura:

$$\tau = k_t I, \quad (67)$$

Ahora tomamos las derivadas de las ecuaciones (65) y (66) [54]:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = J_1 \dot{q}_1, \quad \frac{\partial L}{\partial q_2} = J_2 \dot{q}_2, \quad (68)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = J_1 \ddot{q}_1, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = J_2 \ddot{q}_2. \quad (69)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = -Mgd(1 - \sin(q_1)) - k(q_1 - q_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = k(q_1 - q_2). \quad (70)$$

Las ecuaciones (71) y (72) que representan el subsistema mecánico, como indica la investigación [48], se dan como:

$$J_1 \ddot{q}_1 + mgd \sin(q_1) + k(q_1 - q_2), \quad (71)$$

$$J_2 \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau - B\dot{q}_2 \quad (72)$$

En la tabla (11) se muestran cada uno de los valores de los parámetros de las ecuaciones mencionadas, donde  $q_1$  representa la posición angular de la punta del eje del motor; y  $q_2$  el ángulo en la parte inicial del eje del motor debido a la flexibilidad en la articulación.

Para obtener el sistema dinámico, unimos el modelado matemático del servomotor ecuación (60) con el modelo matemático del sistema mecánico articulación flexible ecuación (71) y (72). Despejando las aceleraciones angulares de las ecuaciones obtenemos:

$$J_1 \ddot{q}_1 + mgd \sin(q_1) + k(q_1 - q_2)$$

$$\ddot{q}_1 = -\frac{mgd \sin(q_1)}{J_1} - \frac{k(q_1 - q_2)}{J_1} \quad (73)$$

$$J_2 \ddot{q}_2 - k(q_1 - q_2) = \tau - B \dot{q}_2$$

$$\ddot{q}_2 = \frac{1}{J_2} \tau - \frac{B \dot{q}_2}{J_2} + \frac{k(q_1 - q_2)}{J_2} \quad (74)$$

En las ecuaciones despejadas de la articulación flexible (73) y (74), reemplazamos la variable “ $q$ ” por “ $\theta$ ” para poder formar una misma nomenclatura con las ecuaciones del servomotor, quedando la ecuación (75) y (76).

$$\ddot{\theta}_1 = (-mgd \sin(\theta_1) - k\theta_1 + k\theta_2) \cdot \frac{1}{J_1} \quad (75)$$

$$\ddot{\theta}_2 = (\tau - B\dot{\theta}_2 + k\theta_1 - k\theta_2) \cdot \frac{1}{J_2} \quad (76)$$

Reemplazamos la parte del torque  $\tau(t)$ , dando una variabilidad a la ecuación (76), mientras que la ecuación (75) mantiene su proporcionalidad, se omite el término “ $t$ ”, ya que se sobreentiende que son ecuaciones con respecto al tiempo, obteniendo las ecuaciones (75) y (77) que representan el modelamiento dinámico del sistema con articulación flexible:

$$\ddot{\theta}_1 = (-mgd \sin(\theta_1) - k\theta_1 + k\theta_2) \cdot \frac{1}{J_1} \quad (75)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \left( \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \dot{\theta}(t) - B\dot{\theta}_2 + k\theta_1 - k\theta_2 \right) \cdot \frac{1}{J_2} \quad (77)$$

### 3.2.2.1 Simulación articulación flexible

Realizamos la simulación en diagrama de bloques de la dinámica del sistema con articulación flexible (ver figura 15), donde se muestran las dos salidas  $\theta_1$  y  $\theta_2$  de las ecuaciones (75) y (77); en las figuras (16) y (17) se observa el desarrollo en diagrama de bloques de las ecuaciones dinámicas.

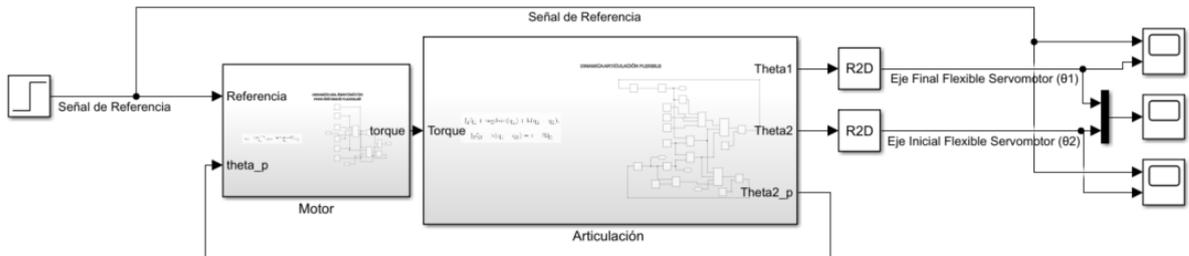


Figura 15. Simulink articulación flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

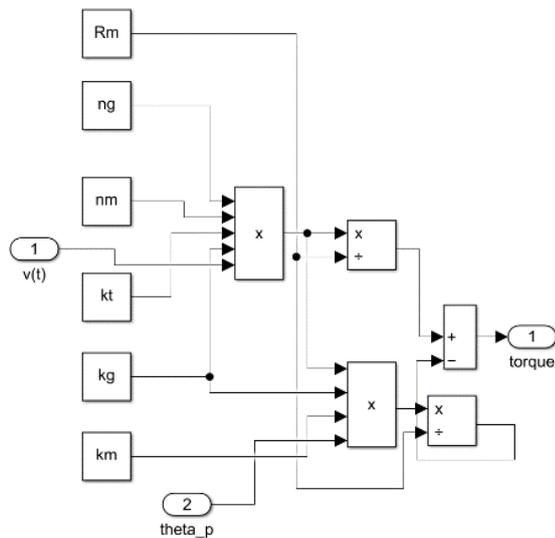
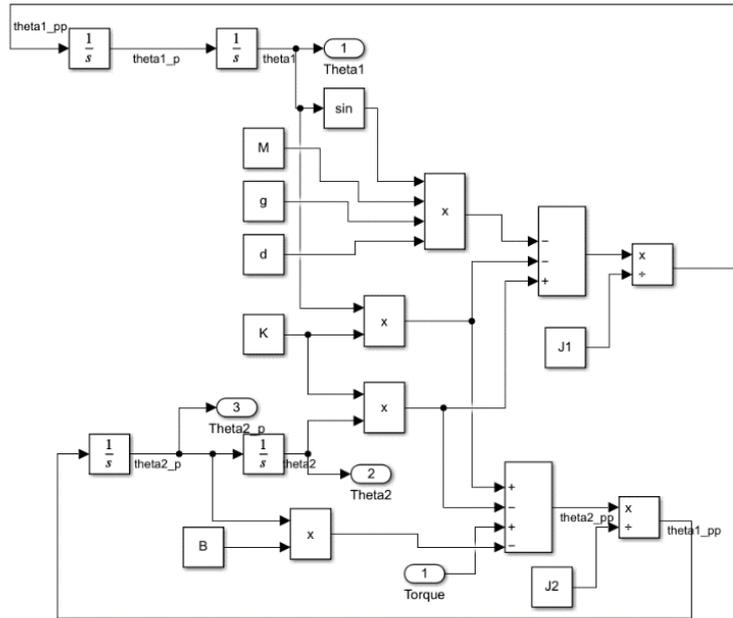


Figura 16. Simulink Servomotor.

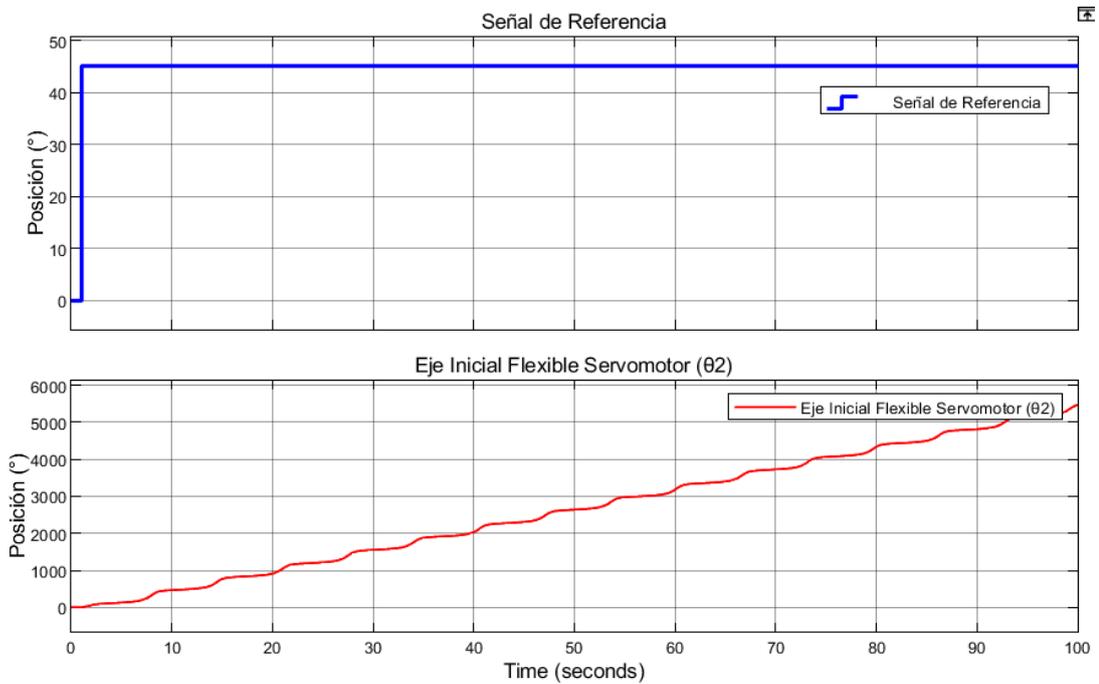
Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 17.** Simulink Articulación Flexible.

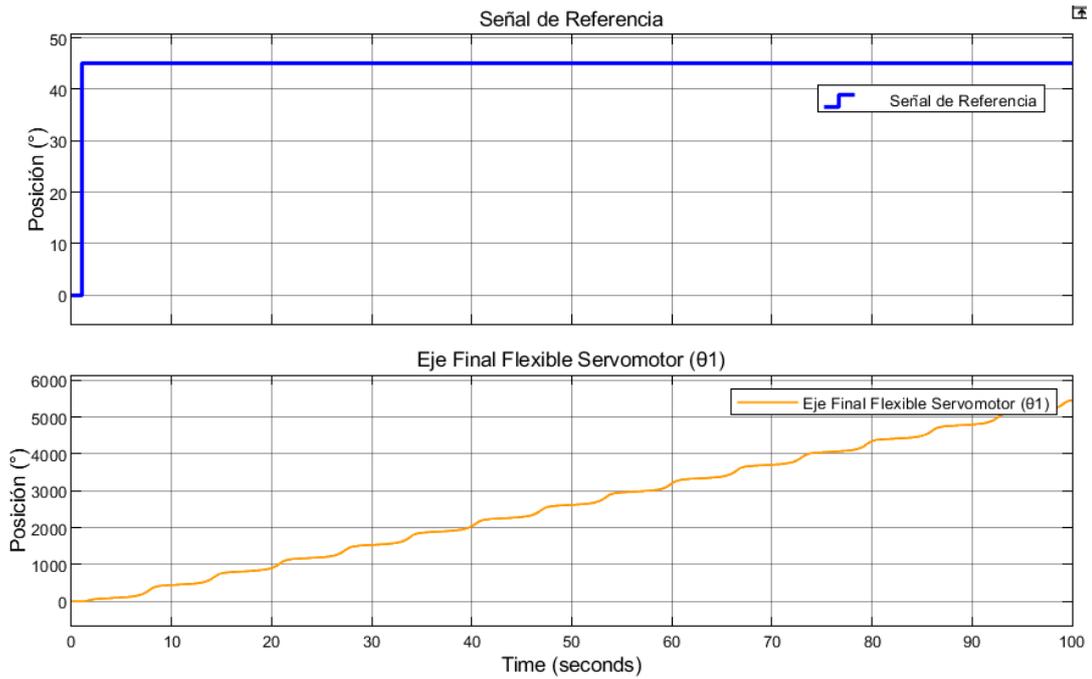
Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Se presentan cada una de las salidas del sistema con flexibilidad en articulación en la figura (18) y (19), se observa el desempeño de su dinámica a través de un tiempo de simulación de 100 segundos en lazo abierto, con un comportamiento inestable en  $\theta_2$  y  $\theta_1$  aplicando una señal escalón de  $45^\circ$  como señal de referencia.



**Figura 18.** Eje Inicial Articulación Flexible ( $\theta_2$ )

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

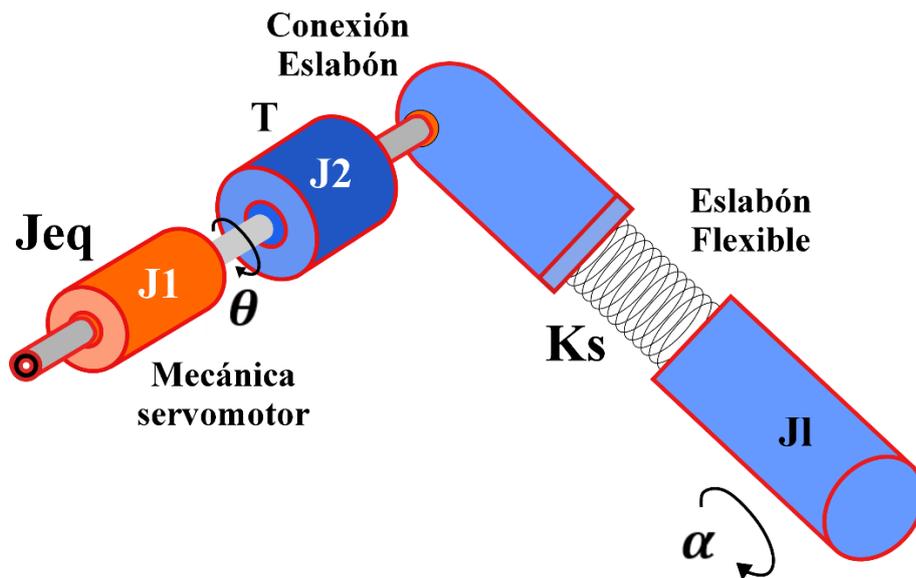


**Figura 19.** Eje Final Articulación Flexible ( $\theta_1$ ).

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.3 Modelado matemático eslabón flexible

En base a las investigación [53], se delimita las ecuaciones dinámicas de un manipulador con eslabón flexible, con sus respectivas variables como indica la figura (20), cuyas variables son descritas (Tabla 12).



**Figura 20.** Variables dinámicas enlace flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Tabla 12.** Parámetros eslabón flexible [53]

<b>Variabes</b>	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
$J_{eq}$	Momento de inercia rotacional en la base del eslabón flexible.	$2.08 \times 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
$J_t$	Inercia rotacional del eslabón con flexibilidad.	$3.81 \times 10^{-3}$	$kg \cdot m^2$
$K_s$	Constante de rigidez del eslabón con flexibilidad.	1.3	$N \cdot m/rad$
$B_{eq}$	Coefficiente de fricción viscosa en el servo.	0.015	$N \cdot m/(rad/s)$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

El sistema se lo expresa empleando la metodología de Lagrange fundamentado en energía. Esta ecuación se la determina a partir la energía cinética y potencial [56]:

$$L = K - P \quad (78)$$

Donde K y P representan la parte cinética y potencial de manera respectiva en el sistema. Estas ecuaciones están expresadas de la siguiente forma [56]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0 \quad (79)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \tau \quad (80)$$

En la ecuación (81) y (82) se expresa el sistema, donde la variable ( $\theta$ ), representa el ángulo de rotación del eslabón flexible con respecto a un punto de referencia, ( $\alpha$ ) se refiere al ángulo de rotación en el extremo final del eslabón debido a su flexibilidad, y ( $\tau$ ) representa el torque aplicado en la articulación entre la base y el eslabón flexible [53]. Se detallan cada uno de los valores (tabla 10) de los parámetros de las ecuaciones (81) y (82).

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}(t) + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha(t) + \frac{1}{J_{eq}} \tau(t), \quad (81)$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}(t) - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \alpha(t) - \frac{1}{J_{eq}} \tau(t), \quad (82)$$

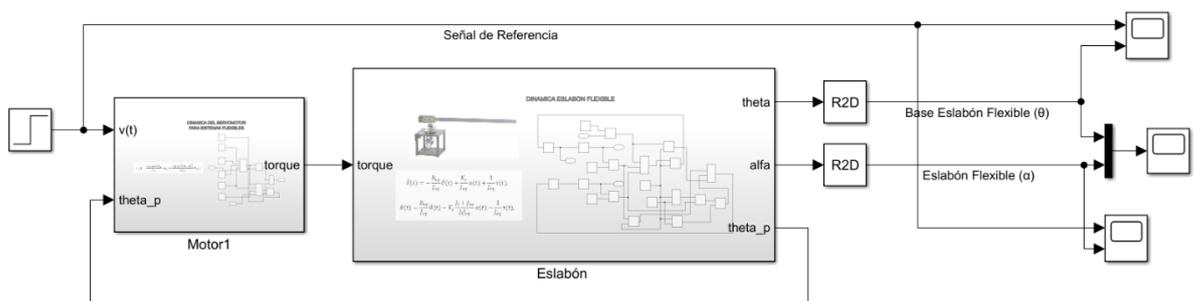
Para obtener el sistema dinámico, unimos el modelado matemático del servomotor ecuación (60) con el modelo matemático del sistema mecánico eslabón flexible ecuación (81) y (82), se omite el término  $t$ , ya que se entiende que son funciones con respecto al tiempo, obteniendo las siguientes ecuaciones finales del sistema (83) y (84):

$$\ddot{\theta} = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta} + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha + \frac{1}{J_{eq}} \left( \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m} v - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \dot{\theta} \right) \quad (83)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta} - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \alpha - \frac{1}{J_{eq}} \left( \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m} v - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m} \dot{\theta} \right) \quad (84)$$

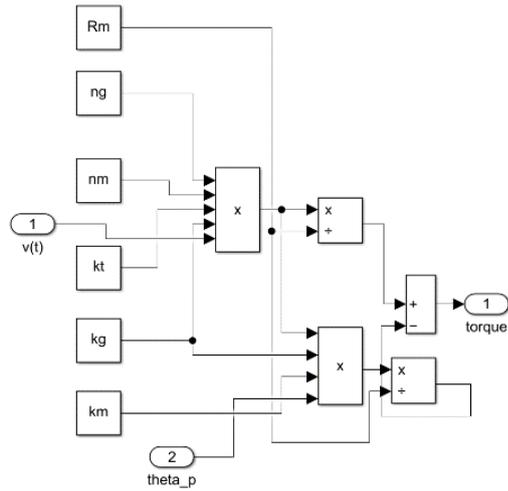
### 3.2.3.1 Simulación Eslabón Flexible

Realizando la simulación en MATLAB© Simulink como indica la figura (21), podemos obtener los comportamientos de la posición con respecto al tiempo de las variables rotacionales  $\theta$  y  $\alpha$  ecuaciones (83) y (84), en la figura (22) y (23) se observa el desarrollo en diagrama de bloques de sus modelos matemáticos.



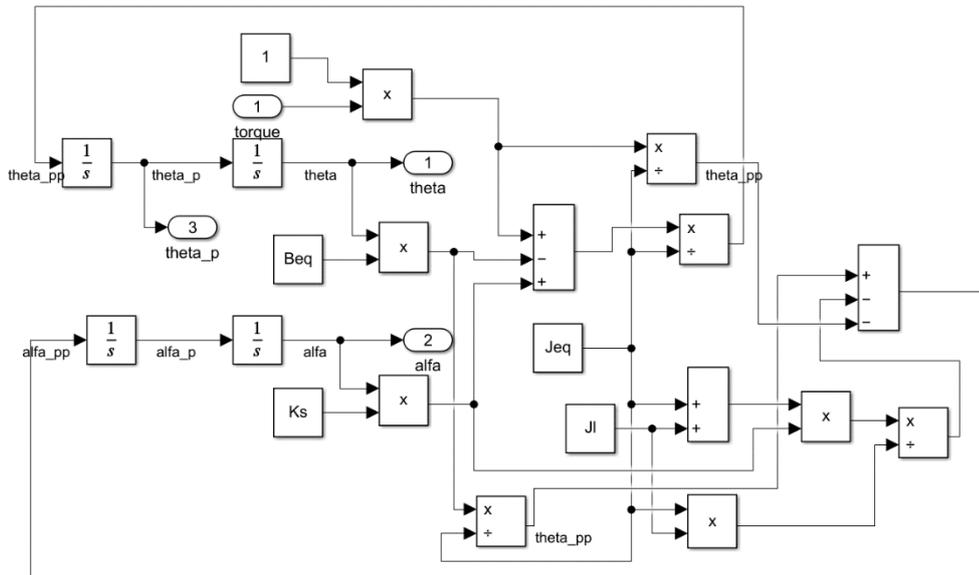
**Figura 21.** Simulink eslabón flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 22.** Simulink Servomotor.

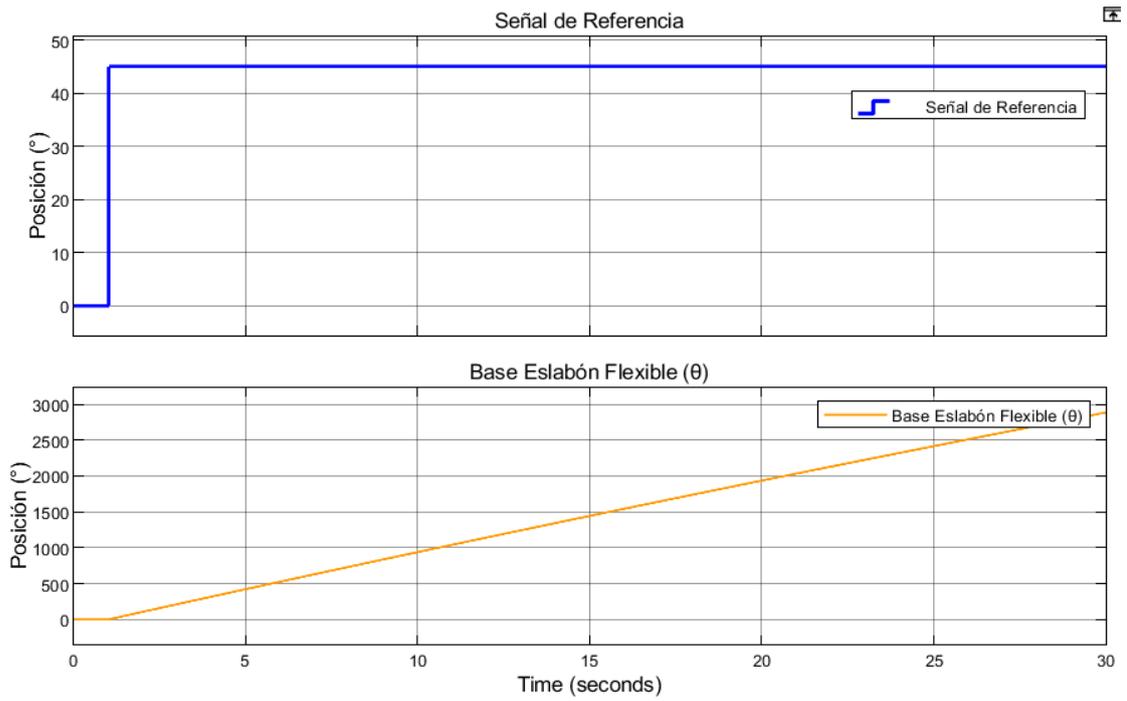
Realizado por: Luis Panchana, 2024.



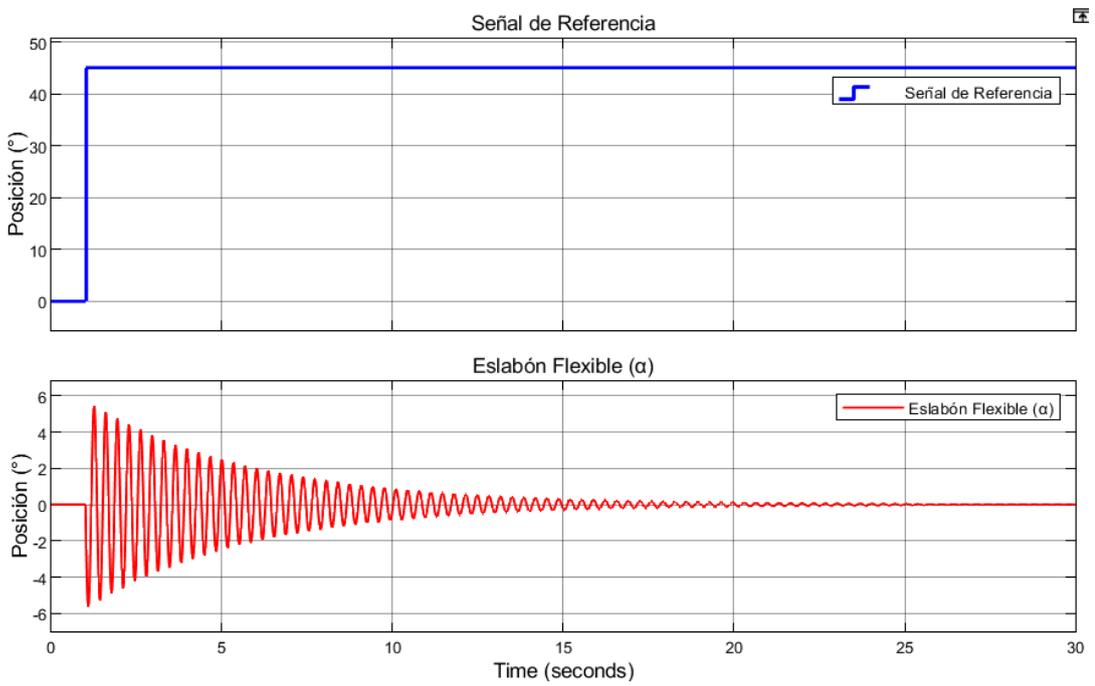
**Figura 23.** Simulink Eslabón Flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

En las figuras (24) y (25) se muestra el comportamiento del sistema flexible en el eslabón, en una simulación de 30 segundos con señal de referencia escalón de  $45^{\circ}$  (lazo abierto), para la salida  $\theta$  (base del eslabón) se presenta un desempeño estable, mientras que en  $\alpha$  (efector final) se observa un desempeño con oscilaciones amortiguadas cuando  $\theta$  realiza un cambio de posición, a medida que  $\theta$  va perdiendo energía va regresando a su posición de  $0^{\circ}$ .



**Figura 24.** Base del Eslabón Flexible ( $\theta$ ).  
 Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 25.** Efecto Final Eslabón Flexible ( $\alpha$ ).  
 Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.4 Unión de los sistemas de articulación y eslabón flexible

Para poder formar un solo modelo dinámico del sistema, se considera conservar la dinámica de  $\ddot{\theta}_2$  ecuación (76), que representa la parte inicial del eje del motor en el sistema de articulación flexible, y  $\ddot{\alpha}$  ecuación (82), que representa la parte final del eslabón, en el sistema de eslabón flexible; mientras que  $\ddot{\theta}_1$  que indica la parte final del eje del motor ecuación (75), y  $\ddot{\theta}$  la parte inicial del eslabón ecuación (81), pasan a ser un solo sistema, pertenecientes los sistemas articulación y eslabón flexible respectivamente, es decir:

$$\ddot{\theta}_{Total} = \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 \quad (85)$$

Se procede a realizar una sumatoria de ambos sistemas, como indica la ecuación (85), al ser dinámicas diferentes,  $\ddot{\theta}_1$  de la articulación y  $\ddot{\theta}$  del eslabón, cada uno de los coeficientes que posee, cumplen una función particular, que dentro de la sumatoria de los mismos, se forma una compensación por ambas partes, donde se obtiene una dinámica que describe de una manera más realista el movimiento rotacional de la parte final del eje del motor donde se conecta el eslabón en un sistema de articulación y eslabón flexible. Se realiza el respectivo remplazo de las ecuaciones obteniendo la ecuación (86):

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_{Total} &= \ddot{\theta} + \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_{Total} &= (-B_{eq}\dot{\theta}_2 + K_s\alpha + \tau) \cdot \frac{1}{J_{eq}} + (-mgdsin(\theta_1) - K\theta_1 + K\theta_2) \cdot \frac{1}{J_1} \\ \ddot{\theta}_{Total} &= -\frac{B_{eq}\dot{\theta}_2}{J_{eq}} + \frac{K_s\alpha}{J_{eq}} + \frac{\tau}{J_{eq}} - \frac{mgdsin(\theta_1)}{J_1} - \frac{K\theta_1}{J_1} + \frac{K\theta_2}{J_1} \end{aligned} \quad (86)$$

La variable  $\ddot{\theta}_{Total}$  viene a ser ahora la nueva variable  $\ddot{\theta}_1$ , que permite describir el comportamiento dinámico en la parte de conexión entre el eje del motor y el eslabón quedando la ecuación (87).

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{B_{eq}\dot{\theta}_2}{J_{eq}} + \frac{K_s\alpha}{J_{eq}} + \frac{\tau}{J_{eq}} - \frac{mgdsin(\theta_1)}{J_1} - \frac{K\theta_1}{J_1} + \frac{K\theta_2}{J_1} \quad (87)$$

Quedando como variables rotacionales en el nuevo sistema flexible de articulación y eslabón  $\ddot{\theta}_1$ ,  $\ddot{\theta}_2$  y  $\ddot{\alpha}$ , como se muestra en la figura (26), donde  $\theta_2$  es el

movimiento rotacional de la parte inicial del eje del motor,  $\theta_1$  es el movimiento rotacional de la parte final del eje del motor y  $\alpha$  movimiento rotacional de la parte final del eslabón. Para la descripción de este sistema se establece una estructura fija (Base) en donde está montado, este sirve como soporte principal y también como referencia para el movimiento de su articulación y eslabón.

Se presenta además en la figura (26) las coordenadas en cómo está ubicado el sistema, como también los cambios de posición que realiza el eslabón alrededor del eje "x". El sistema comienza con una posición inicial en  $0^\circ$  de forma vertical hacia abajo, por otra parte, para las rotaciones angulares en  $90^\circ$  y  $270^\circ$ , estas posiciones son consideradas posiciones horizontales, mientras que en  $180^\circ$  la posición del eslabón se ubica de manera vertical hacia arriba. Cada de uno de los cambios de posición tendrán diferentes comportamientos que serán afectados principalmente por parámetros como la distancia (d), gravedad (g) y la masa (M) del eslabón, además de cada uno de los parámetros de su dinámica.

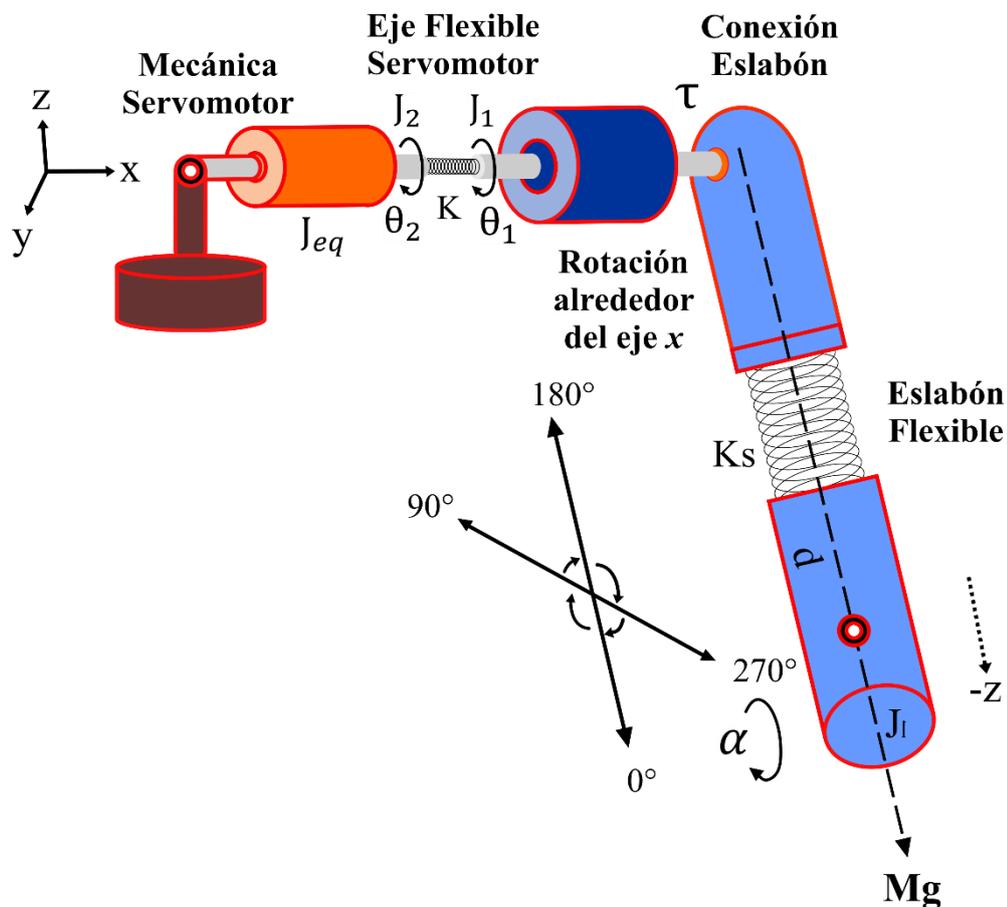


Figura 26. Sistema articulación y eslabón flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.4.1 Dinámica del sistema con articulación y eslabón flexible

Dado el análisis de la unión entre un sistema flexible en articulación y eslabón, se obtiene un sistema final con las ecuaciones (88), (89) y (90), con las variables de ambos sistemas como indica la figura (26). La descripción de cada una de las variables, mantienen su explicación detallada en las tablas (11) y (12).

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{1}{J_2} \tau - \frac{B}{J_2} \dot{\theta}_2 + \frac{K}{J_2} \theta_1 - \frac{K}{J_2} \theta_2 \quad (88)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_2 + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha + \frac{1}{J_{eq}} \tau - \frac{mgd \sin(\theta_1)}{J_1} - \frac{K}{J_1} \theta_1 + \frac{K}{J_1} \theta_2 \quad (89)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_1 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \alpha - \frac{1}{J_{eq}} \tau \quad (90)$$

Para obtener un sistema electromecánico, se sustituyen las ecuaciones matemáticas del servomotor ecuación (60), en la variable  $\tau$  de las ecuaciones mecánicas de los sistemas flexibles, obteniendo las ecuaciones (91), (92) y (93) que representan el comportamiento dinámico del sistema flexible:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} v(t) - \left[ \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} + \frac{B}{J_2} \right] \dot{\theta}_2 + \frac{K}{J_2} \theta_1 - \frac{K}{J_2} \theta_2 \quad (91)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_2 + \frac{K_s}{J_{eq}} \alpha + \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} \dot{\theta}(t) - \frac{mgd}{J_1} \sin(\theta_1) - \frac{K}{J_1} \theta_1 + \frac{K}{J_1} \theta_2 \quad (92)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} \dot{\theta}_1 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} \alpha - \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) + \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} \dot{\theta}(t) \quad (93)$$

### 3.2.4.2 Simulación articulación y eslabón flexible

Para poder obtener salidas del sistema que se asemeje a la realidad donde tenga ambos comportamientos de manera unida (articulación y eslabón), se necesita manipular el momento de inercia del eslabón flexible  $J_l$ , y el momento de inercia de la articulación flexible  $J_{eq}$ , considerando que los valores de los mismos en la investigación [53], son de  $0.00381 \text{ Kgm}^2$  y  $0.00208 \text{ Kgm}^2$ , y se los manipula a  $0.381 \text{ Kgm}^2$  y  $20.8 \text{ Kgm}^2$  respectivamente, estos valores alterados se obtienen mediante análisis de prueba, quedando los valores de este sistema flexible en articulación y enlace como indica la

tabla (13).

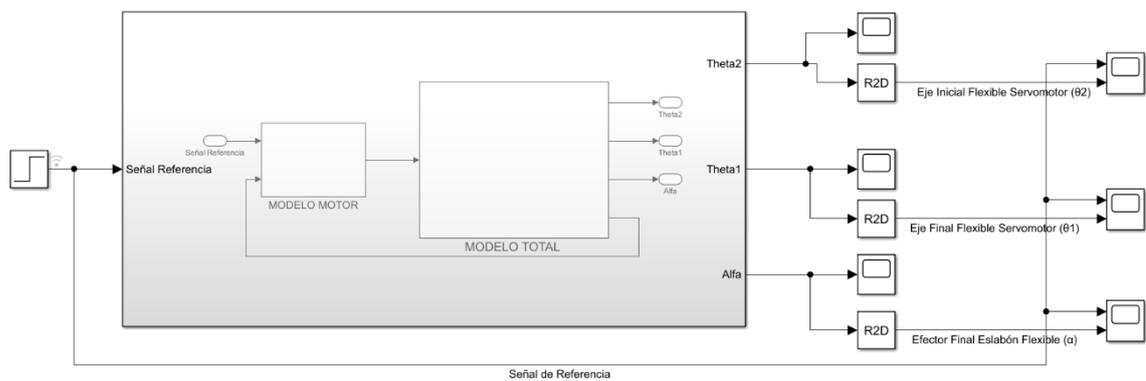
**Tabla 13.** Parámetros actualizados sistema de articulación y eslabón flexible

<b>Variables</b>	<b>Descripción</b>	<b>Valor</b>	<b>Unidades</b>
$J_1$	Momento de inercia rotacional del eslabón (rígido) conectado al motor en la punta del eje.	1	$kg.m^2$
$m$	Masa que está conectada al eje del motor (eslabón).	1	$kg$
$g$	Aceleración gravitacional.	10	$m/s^2$
$d$	Longitud del eslabón.	0.5	$M$
$k$	Constante de rigidez de la articulación flexible entre $\theta_1$ y $\theta_2$ .	14	$N.m.s/rad$
$J_2$	Momento de inercia rotacional en la parte inicial del eje del motor.	0.3	$kg.m^2$
$B$	Constante contraelectromotriz	0.001	$N.m.s/rad$
$J_{eq}$	Momento de inercia rotacional en la base del eslabón flexible.	20.8	$kg.m^2$
$J_l$	Inercia rotacional del eslabón con flexibilidad.	$3.81 \times 10^{-1}$	$kg.m^2$
$K_s$	Constante de rigidez del eslabón con flexibilidad.	1.3	$N.m/rad$
$B_{eq}$	Coefficiente de fricción viscosa en el servo.	0.015	$N.m/(rad/s)$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

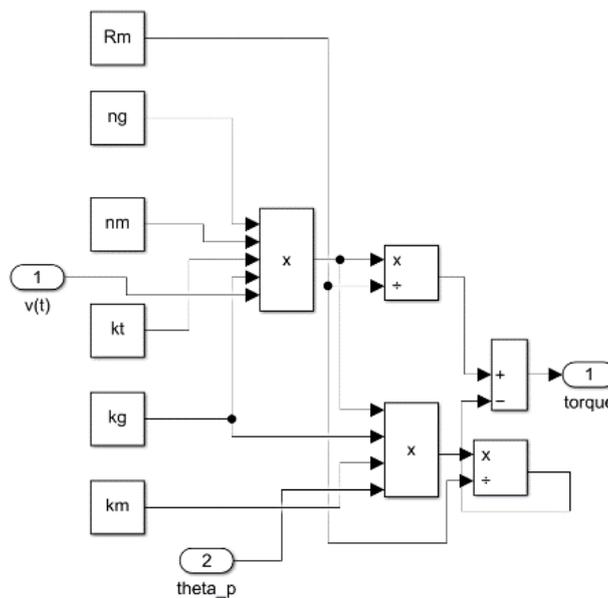
Llevando a cabo la simulación de las ecuaciones dinámicas (91), (92) y (93), unido a la parte eléctrica del servomotor ecuación (60), se obtiene un sistema con tres salidas en lazo abierto, las mismas que se muestran en las figuras (30), (31) y (32), cada una de ellas ( $\theta_2, \theta_1$  y  $\alpha$ ), estas salidas se la aprecia en tiempos de 150 segundos con una señal de entrada escalón de  $45^\circ$ , para las salidas  $\theta_2$  y  $\theta_1$  se observa un comportamiento inestable de crecimiento lineal con pequeñas oscilaciones, mientras que para la salida  $\alpha$  se presentan ciclos de oscilaciones repetitivas cada aproximadamente 25 segundos alrededor del eje de  $0^\circ$ .

En la figura (27) se observa la simulación general del sistema en lazo abierto, donde se tiene de manera separada la dinámica del servomotor y las ecuaciones mecánicas de articulación y eslabón flexible, se realiza esto para trabajar de una forma más ordenada en la simulación del sistema, donde se emplea una señal de referencia escalón de  $45^{\circ}$  para observar el comportamiento de cada una de las variables de salida con que se está trabajando. En las figuras (28) y (29) se observa de una forma más detallada la simulación en diagrama de bloques de la dinámica del servomotor y las ecuaciones matemáticas del sistema con articulación y enlace flexible de la figura (27).



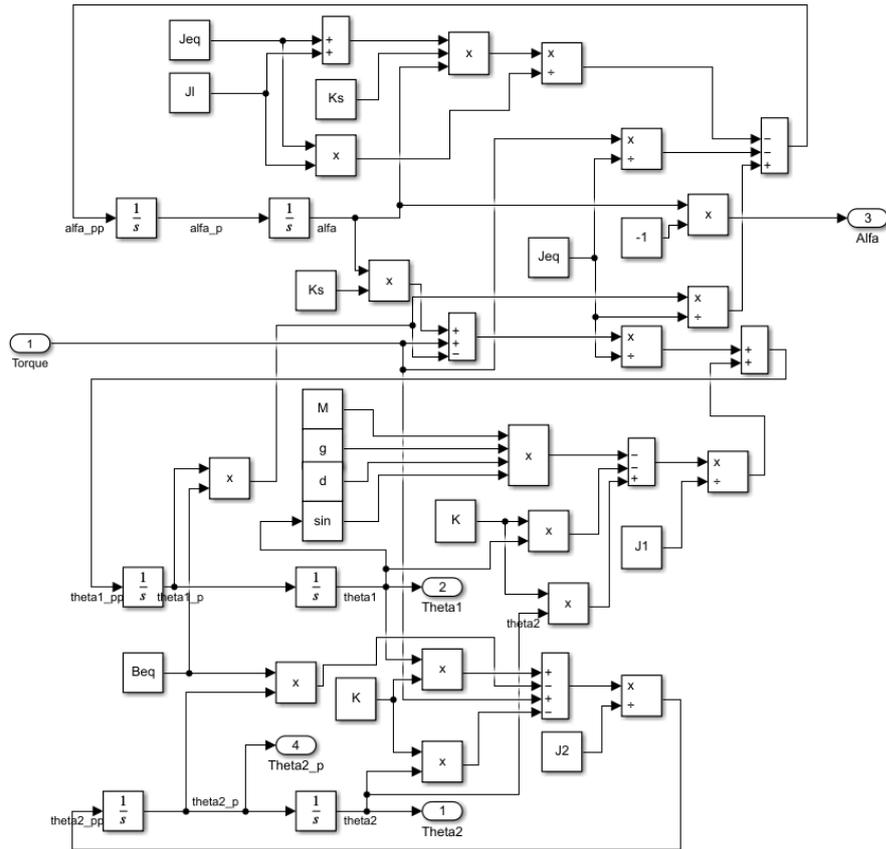
**Figura 27.** Simulación dinámica articulación y eslabón flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

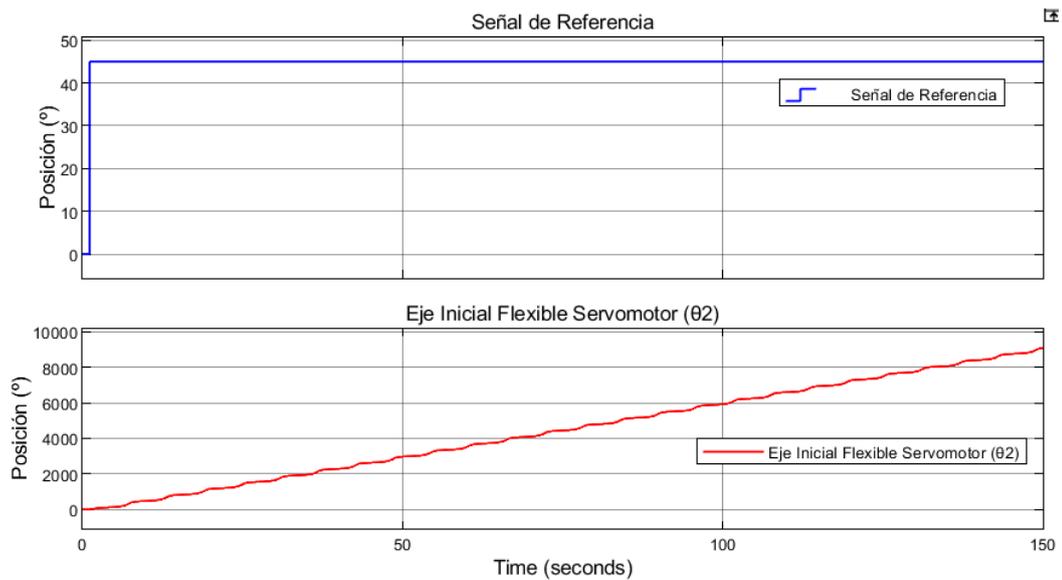


**Figura 28.** Simulink Servomotor.

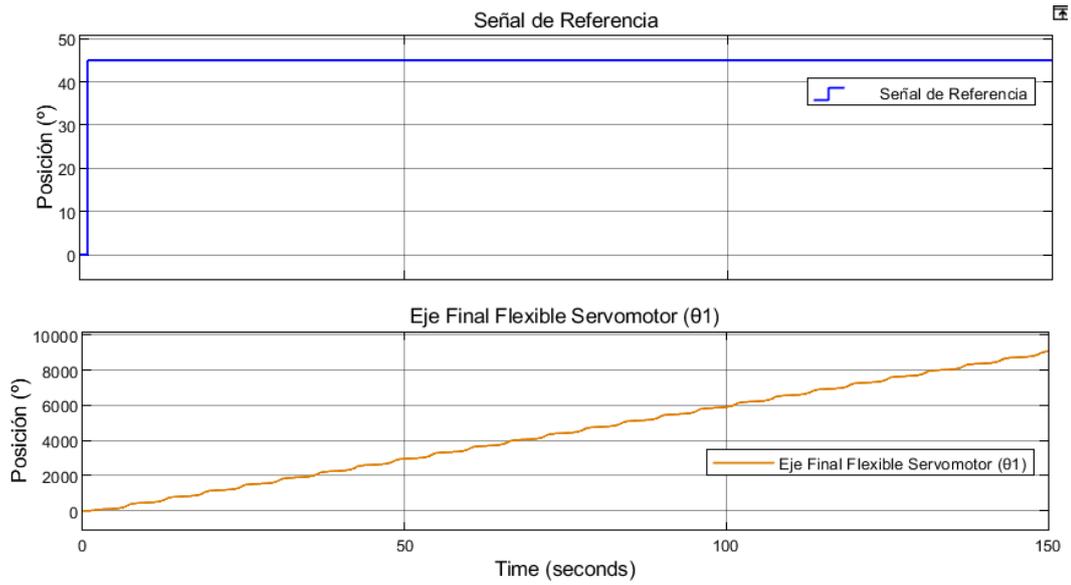
Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 29.** Simulación en diagrama de bloques articulación y eslabón flexible.  
 Realizado por: Luis Panchana, 2024.

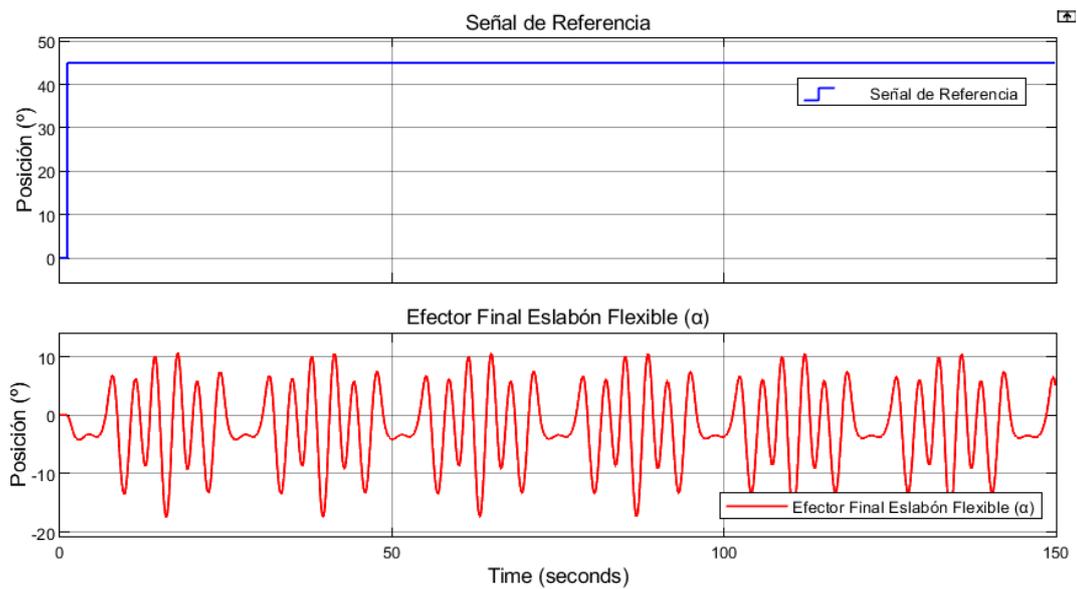


**Figura 30.** Salida Inicial Servomotor ( $\theta_2$ ).  
 Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 31.** Salida Final Servomotor ( $\theta_1$ ).

Realizado por: Luis Panchana, 2024.



**Figura 32.** Efector Final Enlace Flexible ( $\alpha$ ).

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.5 Linealización del modelado matemático usando la técnica espacio de estados

Una vez definido cada una de las ecuaciones (91), (92) y (93), se procede a la utilización de un método de linealización, para este caso se utiliza el método de variables de estado, de esta manera se obtendrá un sistema donde se pueda emplear un control sobre el mismo.

Para llevar a cabo este proceso se deben tener en cuenta dos puntos importantes:

- Identificación de las coordenadas de equilibrio del sistema.
- Linealización del sistema alrededor de puntos de equilibrio.

Dentro de la linealización, alrededor de los puntos de equilibrio, se utilizará el método de los jacobianos, estos representan la matriz A, matriz B y C.

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \quad B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

$$C = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}}$$

Se procede a emplear jacobiano, en el sistema de estudio obtenido, al trabajar con ecuaciones de segundo orden, se procede a reformular las ecuaciones en un conjunto de ecuaciones de primer orden.

$$\begin{aligned} X_1 &= \theta_2 \\ X_2 &= \dot{\theta}_2 \\ X_3 &= \theta_1 \\ X_4 &= \ddot{\theta}_1 \\ X_5 &= \alpha \\ X_6 &= \dot{\alpha} \end{aligned}$$

Se reemplaza las ecuaciones dinámicas del sistema en función de espacio de estados:

$$\dot{X}_1 = X_2 \quad (94)$$

$$\dot{X}_2 = \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} v(t) - \left[ \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} + \frac{B}{J_2} \right] X_2 + \frac{K}{J_2} X_3 - \frac{K}{J_2} X_1 \quad (95)$$

$$\dot{X}_3 = X_4 \quad (96)$$

$$\dot{X}_4 = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 + \frac{K_s}{J_{eq}} X_5 + \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 - \frac{mgd}{J_1} \sin(X_3) - \frac{K}{J_1} X_3 + \frac{K}{J_1} X_1 \quad (97)$$

$$\dot{X}_5 = X_6 \quad (98)$$

$$\dot{X}_6 = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J J_{eq}} X_5 - \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) + \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 \quad (99)$$

Se expresa cada una de las ecuaciones (94), (95), (96), (97), (98) y (99) de estado de forma matricial (100):

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \\ \dot{X}_5 \\ \dot{X}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} v(t) - \left[ \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} + \frac{B}{J_2} \right] X_2 + \frac{K}{J_2} X_3 - \frac{K}{J_2} X_1 \\ X_4 \\ -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 + \frac{K_s}{J_{eq}} X_5 + \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 - \frac{mgd}{J_1} \sin(X_3) - \frac{K}{J_1} X_3 + \frac{K}{J_1} X_1 \\ X_6 \\ \frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J J_{eq}} X_5 - \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) + \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 \end{bmatrix} \quad (100)$$

Se lleva a cabo el planteamiento de las derivadas parciales para obtener la matriz A

(101):

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_6} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \quad (101)$$

Se resuelve cada una de las derivadas parciales (ver tabla 14), de cada una de las funciones para determinar la matriz A, considerando a  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$  y  $f_6$  de la siguiente forma (102), (103), (104), (105), (106) y (107):

$$f_1 = X_2 \quad (102)$$

$$f2 = \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} v(t) - \left[ \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} + \frac{B}{J_2} \right] X_2 + \frac{K}{J_2} X_3 - \frac{K}{J_2} X_1 \quad (103)$$

$$f3 = X_4 \quad (104)$$

$$f4 = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 + \frac{K_s}{J_{eq}} X_5 + \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 - \frac{mgd}{J_1} \sin(X_3) - \frac{K}{J_1} X_3 + \frac{K}{J_1} X_1 \quad (105)$$

$$f5 = X_6 \quad (106)$$

$$f6 = \frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} X_5 - \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) + \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 \quad (107)$$

**Tabla 14.** Resolución de derivadas parciales para la matriz espacio de estados.

f1	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_2} = 1$	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_4} = 0$	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_5} = 0$	$\frac{\partial f_1(x, u)}{\partial x_6} = 0$
f2	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_1} = -\frac{K}{J_2}$	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_2} = -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2}$	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_3} = \frac{K}{J_2}$	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_4} = 0$	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_5} = 0$	$\frac{\partial f_2(x, u)}{\partial x_6} = 0$
f3	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_2} = 0$	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_4} = 1$	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_5} = 0$	$\frac{\partial f_3(x, u)}{\partial x_6} = 0$
f4	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_1} = \frac{K}{J_1}$	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_2} = -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}}$	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_3} = -\frac{mgd}{J_1} \cos(X_3) - \frac{K}{J_1}$	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_4} = -\frac{B_{eq}}{J_{eq}}$	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_5} = \frac{K_s}{J_{eq}}$	$\frac{\partial f_4(x, u)}{\partial x_6} = 0$
f5	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_2} = 0$	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_4} = 0$	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_5} = 0$	$\frac{\partial f_5(x, u)}{\partial x_6} = 1$
f6	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_1} = 0$	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_2} = \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}}$	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_4} = \frac{B_{eq}}{J_{eq}}$	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_5} = -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}}$	$\frac{\partial f_6(x, u)}{\partial x_6} = 0$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Realizada cada una de las derivadas parciales, se evalúa los puntos de equilibrio donde  $x = 0$  y  $u = 0$ , quedando la matriz A final (108) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
A &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{J_2} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2} & \frac{K}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} & -\frac{mgd}{J_1} \cos(\theta_1) - \frac{K}{J_1} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} & 0 & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \quad (108)
\end{aligned}$$

Dentro del planteamiento para determinar la matriz B (109), se utilizan las funciones (94), (95), (96), (97), (98) y (99) ya empleadas en la matriz A.

$$\begin{aligned}
B &= \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} v(t) - \left[ \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} + \frac{B}{J_2} \right] X_2 + \frac{K}{J_2} X_3 - \frac{K}{J_2} X_1 \\ -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 + \frac{K_s}{J_{eq}} X_5 + \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 - \frac{mgd}{J_1} \sin(X_3) - \frac{K}{J_1} X_3 + \frac{K}{J_1} X_1 \\ \frac{B_{eq}}{J_{eq}} X_4 - K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} X_5 - \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} v(t) + \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} X_2 \end{bmatrix} \quad (109)
\end{aligned}$$

Se lleva a cabo el planteamiento de las derivadas parciales para obtener la matriz B final (110), y la evaluación respectiva  $x = 0$  y  $u = 0$ .

$$B = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_4(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_5(x, u)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_6(x, u)}{\partial u} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} \\ 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} \\ 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} \Bigg|_{\substack{x=0 \\ u=0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_2} \\ 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} \\ 0 \\ \frac{n_g n_m k_t k_g}{R_m J_{eq}} \end{bmatrix} V_{PC}(t) \quad (110)$$

### 3.2.6 Evaluación de los puntos de operación para el sistema flexible en articulación y eslabón

Dentro del estudio del sistema unido en articulación y eslabón flexible se tienen diferentes puntos de operación, donde se busca definir mediante esta evaluación que puntos son considerados estables y cuales no, es importante establecer los ángulos en donde se linealizará el sistema, considerando que hay evaluaciones donde se obtiene un resultado nulo como respuesta al evaluar  $-\frac{mgd}{J_1} \cos \theta_1$ , eliminando parámetros importantes como la gravedad ( $g$ ), masa del eslabón ( $m$ ), distancia del eslabón ( $d$ ) y momento de inercia ( $J_1$ ) como indica la tabla (15).

Tabla 15. Evaluación de puntos de operación.

Puntos de operación	Evaluaciones
$0^\circ / 360^\circ$	$-\frac{mgd}{J_1} \cos(0^\circ - 360^\circ) = -\frac{mgd}{J_1}$
$90^\circ$	$-\frac{mgd}{J_1} \cos(90^\circ) = 0$
$180^\circ$	$-\frac{mgd}{J_1} \cos(180^\circ) = \frac{mgd}{J_1}$
$270^\circ$	$-\frac{mgd}{J_1} \cos(270^\circ) = 0$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Se realizan diferentes análisis linealizando el sistema con el método de espacio de estados en diferentes puntos de operación como indica la tabla (15), estos se consideran como puntos claves en sistemas robóticos que realizan movimientos rotacionales, esto permite llevar a cabo la evaluación del comportamiento de sus oscilaciones y la estabilidad que va teniendo el sistema a través del tiempo, también permite validar si en los puntos inestable del sistema se puede llegar a tener un buen comportamiento. Para el análisis de los puntos de operación se trabaja con señales de referencia, se selecciona señal escalón y señal tipo impulso. Para la matriz B se mantendrá en todos los análisis, igual que la matriz (110).

### 3.2.6.1 Linealización del sistema con punto de operación en $0^0 / 360^0$

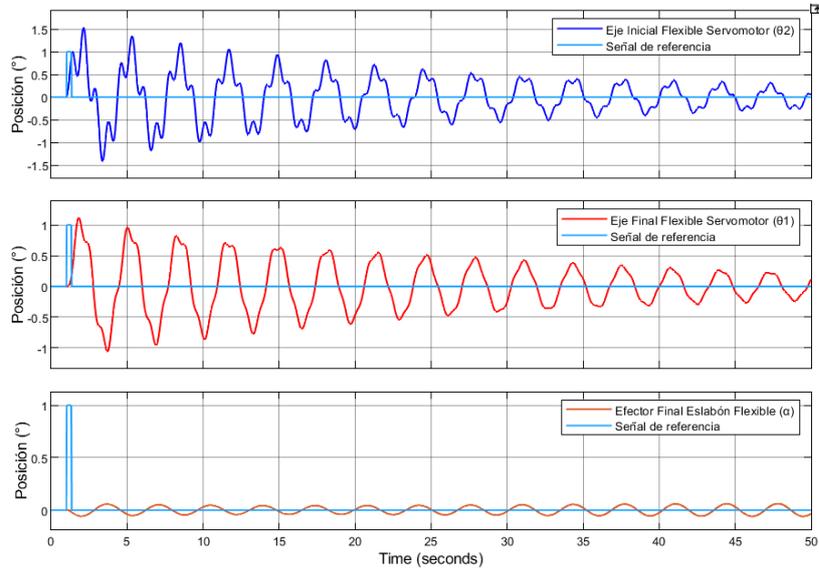
Se realiza el respectivo análisis del sistema linealizado en un punto de operación de  $0^0$ , se toma como referencia la matriz (108). Para la evaluación del punto de operación se evalúa  $-\frac{mgd}{J_1} \text{Cos}(0^0) - \frac{K}{J_1}$  dando como resultado  $-\frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1}$ , quedando la matriz (111). Es importante mencionar que se obtendrá la misma matriz en la evaluación de  $-\frac{mgd}{J_1} \text{Cos}(360^0) - \frac{K}{J_1}$ .

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_2} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2} & \frac{K}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} & -\frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} & 0 & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (111)$$

#### a. Análisis de señal impulso con punto de operación a $0^0$

En el análisis de la señal tipo impulso de  $1^0$  en lazo abierto como indica la figura (33) se puede observar que, el sistema tiene un comportamiento con oscilaciones

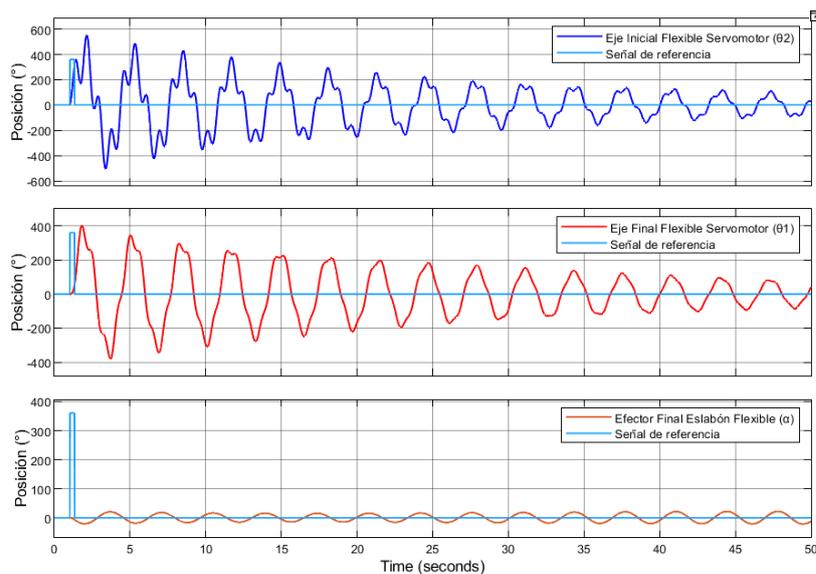
amortiguadas, pero sin obtener algún tipo de desplazamiento angular representativo, para  $\theta_2$  las oscilaciones son de mayor magnitud y de manera más pronunciadas en comparación con  $\theta_1$  que su magnitud de oscilación es un poco más pequeña, para  $\alpha$  se presenta un comportamiento oscilatorio en su posición de  $0^0$ , considerando al sistema estable en esta evaluación.



**Figura 33.** Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso  $1^0$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**b. Análisis de señal impulso con punto de operación a  $360^0$**



**Figura 34.** Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso  $360^0$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Se aprecia en la figura (34) la evaluación del sistema con señal tipo impulso de  $360^0$  en lazo abierto, para  $\theta_2$  se tiene desplazamientos angulares de gran magnitud de manera pronunciada, mientras que en  $\theta_1$  se tiene movimientos angulares con oscilaciones de menor magnitud que sigue la trayectoria de  $\theta_2$ , para la salida de  $\alpha$  se presenta un comportamiento oscilatorio de manera constante, donde se define al sistema como estable.

### 3.2.6.2 Linealización del sistema con punto de operación en $90^0$

Para este análisis con punto de operación en  $90^0$ , tomando en consideración la evaluación de  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(\theta_1) - \frac{K}{J_1}$ , se realiza el cálculo de  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(89.99^0) - \frac{K}{J_1}$  dando como resultado  $\frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1}$ , se selecciona  $89.99^0$  para no eliminar los parámetros  $-\frac{mgd}{J_1}$ , quedando la matriz (112).

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_2} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2} & \frac{K}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} & -\frac{mgd}{J_1} (1.74 \times 10^{-4}) - \frac{K}{J_1} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} & 0 & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (112)$$

#### a. Análisis de señal tipo impulso con punto de operación a $90^0$

En la figura (35) se analiza el comportamiento de cada una de las salidas ( $\theta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\alpha$ ) con una señal de ingreso tipo impulso ( $90^0$ ) en lazo abierto, para las salidas  $\theta_2$  y  $\theta_1$  se observa al inicio un desplazamiento angular de gran magnitud, el mismo que va perdiendo su cambio de posición a medida del tiempo, esto se debe a que por efecto de la gravedad ( $g$ ), esta actúa como una fuerza contraria, una vez terminada la señal impulso y que  $\theta_2$  y  $\theta_1$  han realizado un desplazamiento respectivamente, son enviadas nuevamente a sus puntos de origen. Para la salida de  $\alpha$  se presentan oscilaciones

continuas de poca magnitud, manteniendo su posición en el eje de  $0^0$ . Bajo este análisis se considera al sistema estable.

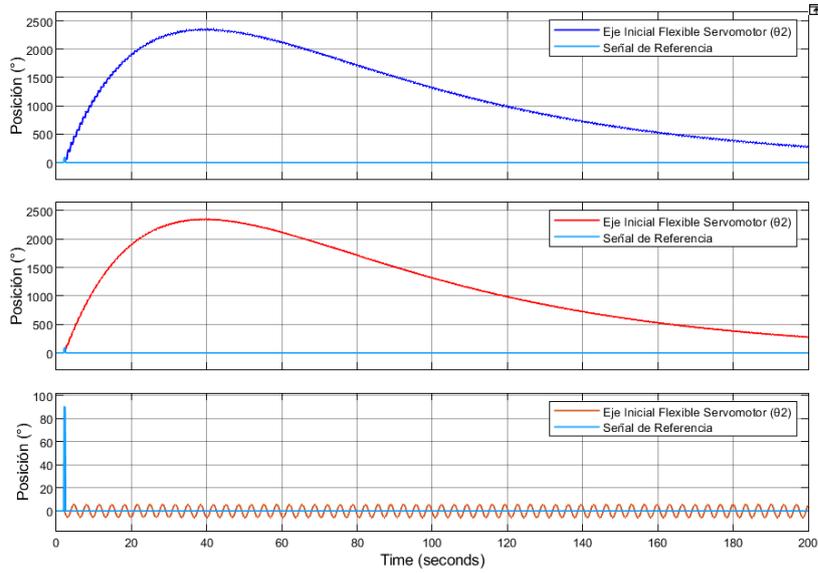


Figura 35. Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal tipo impulso  $90^0$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

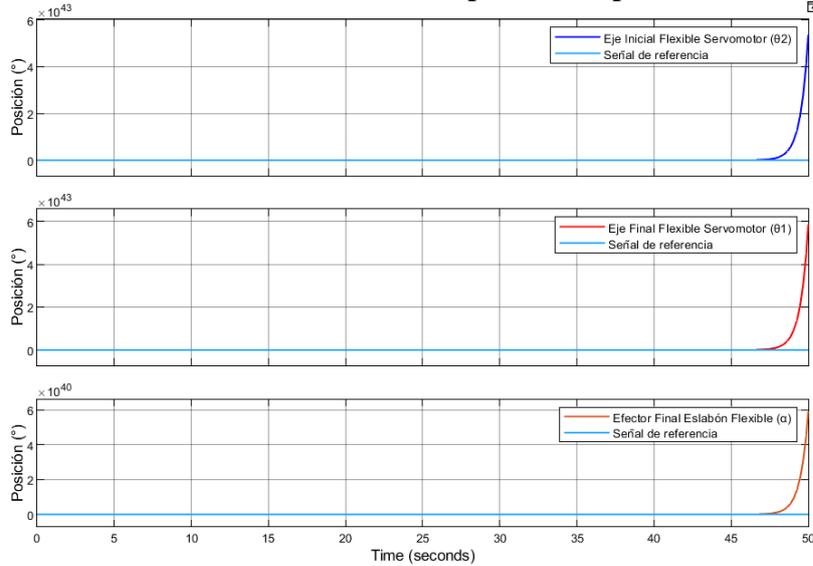
### 3.2.6.3 Linealización del sistema con punto de operación en $180^0$

Para este análisis el punto de operación es  $180^0$ , se realiza la respectiva evaluación en  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(\theta_1) - \frac{K}{J_1}$  donde se obtiene en el cálculo  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(180^0) - \frac{K}{J_1}$  dando como resultado  $\frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1}$ , quedando así la matriz (113).

$$A = \left. \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_2} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2} & \frac{K}{J_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} & -\frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} & \frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} & 0 & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad (113)$$

$x=x_e$   
 $u=u_e$

### a. Análisis de señal escalón con punto de operación a $180^0$



**Figura 36.** Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal escalón  $180^0$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

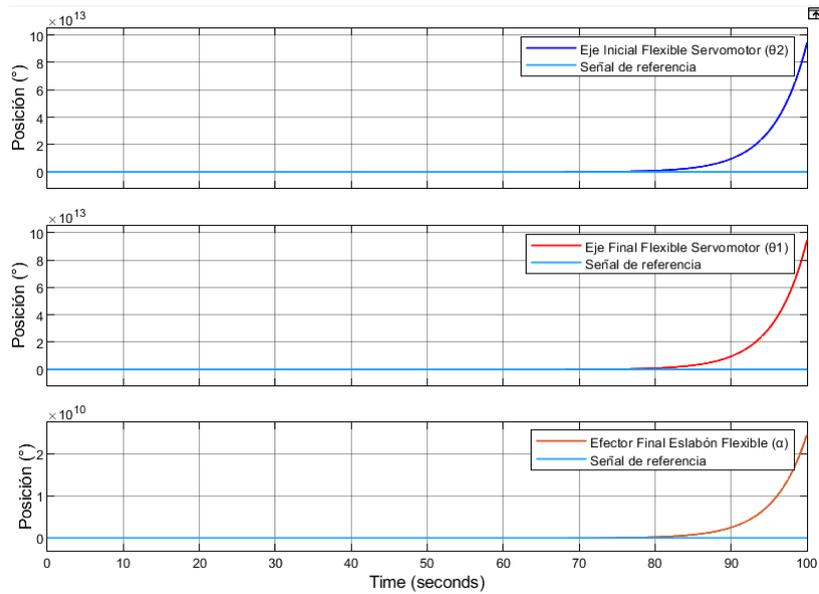
Para el caso de una señal escalón de  $180^0$  en lazo abierto, se observa un comportamiento de inestabilidad en cada una de las salidas ( $\theta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\alpha$ ) en la figura (36), al ser una señal de referencia de gran magnitud, el sistema no consigue ningún tipo de estabilidad, definiendo al sistema en este punto como inestable.

#### 3.2.6.4 Linealización del sistema con punto de operación en $270^0$

Para este análisis el punto de operación es  $270^0$ , se realiza la respectiva evaluación  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(270^0) - \frac{K}{J_1}$ , dando como resultado  $-\frac{K}{J_1}$  anulando parámetros importantes, por tanto para este tipo de análisis se considera emplear un valor aproximado como  $-\frac{mgd}{J_1} \cos(269^0) - \frac{K}{J_1}$ , dando como resultado  $0.0174 \frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1}$ , quedando la matriz (114).

$$A = \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{\substack{x=x_e \\ u=u_e}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_2} - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} - \frac{B}{J_2} & \frac{K}{J_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_1} - \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_2} & 0.017 \frac{mgd}{J_1} - \frac{K}{J_1} & -\frac{B_{eq}}{J_{eq}} & \frac{K_s}{J_{eq}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{n_g n_m k_t k_m K_g^2}{R_m J_{eq}} & 0 & \frac{B_{eq}}{J_{eq}} & -K_s \frac{J_l + J_{eq}}{J_l J_{eq}} & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} x=x_e \\ u=u_e \end{matrix} \quad (114)$$

### a. Análisis de señal escalón con punto de operación a $270^\circ$



**Figura 37.** Salidas del sistema flexible en lazo abierto con señal escalón  $270^\circ$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Ante una señal de referencia (señal escalón) de gran magnitud ( $270^\circ$ ) en lazo abierto, se analiza en la figura (37) que el sistema se comporta para cada una de las salidas ( $\theta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\alpha$ ) de manera inestable, y que se necesita de un respectivo control para poder llegar a una estabilidad en el cambio de posición.

### 3.2.7 Diseño y desarrollo del controlador PID tradicional

Teniendo como referencia el análisis de los diferentes puntos de operación como indica la tabla (16), se selecciona para esta investigación la linealización del sistema flexible con punto de operación en  $90^0$  considerado como un punto estable del sistema, para poder aplicar el respectivo control ante los cambios de posición. Se parte por la implementación de un control PID tradicional para poder tener una mejor precisión en el desempeño el sistema.

**Tabla 16.** Respuesta del sistema ante diferentes puntos de operación.

Evaluaciones	Respuesta del sistema
$-\frac{mgd}{J_1} \cos(0^0 / 360^0) = -\frac{mgd}{J_1}$	<b>Punto estable del sistema flexible</b>
$-\frac{mgd}{J_1} \cos(90^0) = 0$	<b>Punto inestable del sistema flexible</b>
$-\frac{mgd}{J_1} \cos(180^0) = \frac{mgd}{J_1}$	<b>Punto inestable del sistema flexible</b>
$-\frac{mgd}{J_1} \cos(270^0) = 0$	<b>Punto inestable del sistema flexible</b>

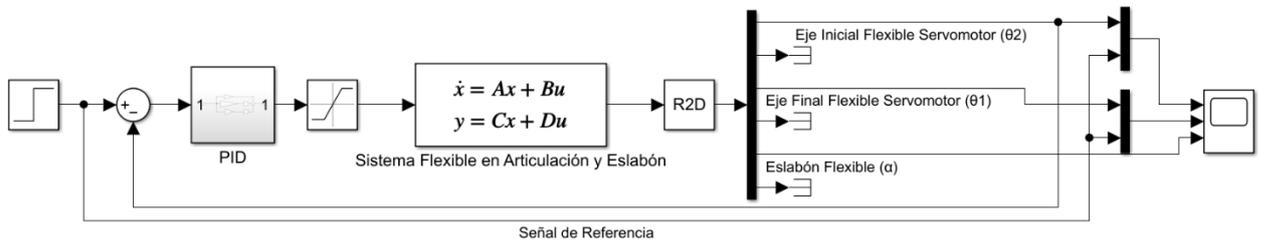
Realizado por: Luis Panchana, 2024.

#### 3.2.7.1 Método heurístico para diseño de control PID

En esta sección se procede con el diseño y ajuste de un controlador PID común, el mismo que está diseñado mediante el método de prueba y error en sus parámetros de control. Este enfoque se realiza debido a que el sistema al ser de orden superior, los ajustes de sintonización de manera tradicional no son factibles, también se busca en esta sección encontrar parámetros aceptables de estabilidad en un tiempo extendido y una minimización de las oscilaciones en la punta del enlace flexible. Este control PID se realiza en la parte inicial del eje del motor ( $\theta_2$ ), para poder suprimir las oscilaciones que se crean desde un inicio en este sistema elástico, que va causando perturbación después en la punta del eje flexible del servomotor (base del eslabón)  $\theta_1$ , y así afectando a la punta del enlace flexible ( $\alpha$ ).

Considerando los ajustes en la ganancia proporcional donde su variación ayuda a reducir el error de estado estacionario, la ganancia derivativa amortigua las oscilaciones

y la estabilidad del sistema, y la ganancia integral que permite eliminar el error permanente en el régimen estacionario, se manipulan estos valores en el diagrama de bloque para poder analizar cada uno de sus resultados, como indica la figura (38).



**Figura 38.** Ajuste prueba y error control PID.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.7.2 Selección de parámetros ( $K_p$ , $K_i$ y $K_d$ ) mediante el comportamiento de la base y punta del sistema flexible

Durante las pruebas realizadas de manera heurística para determinar el comportamiento de control PID tradicional, se analiza los siguientes comportamientos del sistema. Se muestra en la tabla (17) los comportamientos de cada una de las salidas evaluadas en diferentes tipos de parámetros asignados a las señales de control del PID, con la finalidad de poder seleccionar los mejores componentes que den un valor de estabilización prolongado y un valor de amplitud pequeño en el rango de oscilación. Se toma como referencia los parámetros  $K_p = 0.00075$ ,  $K_i = 7 \times 10^{-7}$  y  $K_d = 0.009$ , y a partir de allí, se evalúa el comportamiento de la variación de los parámetros mencionados.

Dentro de los conceptos de control continuo se considera que, en el tiempo de estabilización la señal a controlar empieza a estar dentro de un rango de 2% y 5% del valor final, sin embargo, en esta investigación se trabaja con un intervalo más estricto para poder obtener mejores resultados de precisión, por lo tanto, se establece un rango de valor del 1% a 0.5%, de esta manera es como se presenta cada uno de los tiempos de estabilización en la tabla (17); por otra parte en la columna de los rangos de valores de oscilación de  $\alpha$ , por medio del simulador numérico se analiza el punto más alto y más bajo que se encuentra en la perturbación con respecto al eje 0, y de esta forma se lo establece por medio de corchetes; mientras que para el cálculo del valor del porcentaje de sobreelongación, se selecciona el valor final y el punto máximo de oscilación del ángulo ( $\theta_1$ ) analizando las gráficas de salida como indica la figura (39).

Tabla 17. Método prueba y error para señales de control PID.

N.º	Señal de referencia	$K_p$	$K_i$	$K_d$	Base del eslabón ( $\theta_1$ ) (Tiempo de estabilización)	Punta del eslabón ( $\alpha$ ) (Rango de oscilación)	Sobreimpulso ( $\theta_1$ )	Valor final ( $\theta_1$ )
1	Señal Escalón de $90^\circ$	0.00072	$4 \times 10^{-7}$	0.006	90.39	$[0.00953^0, -0.001137^0]$	5.84%	$79.12^0$
2		0.00073	$5 \times 10^{-7}$	0.007	89.96	$[0.0107^0, -0.01224^0]$	4.07%	$79.6^0$
3		0.00074	$6 \times 10^{-7}$	0.008	87.82	$[0.01203^0, -0.01345^0]$	2.60%	$80.09^0$
4		0.00075	$7 \times 10^{-7}$	0.009	56.48	$[0.006183^0, -0.008101^0]$	1.40%	$80.63^0$
5		0.00076	$8 \times 10^{-7}$	0.0010	200	$[0.00641^0, -0.00868^0]$	16.78%	$83,14^0$
6		0.00077	$9 \times 10^{-7}$	0.0011	294.203	$[0.006455^0, -0.008308^0]$	17.34%	$82.93^0$
7		0.00078	$10 \times 10^{-7}$	0.0012	124.476	$[0.009575^0, -0.008417^0]$	20.81%	$89,11^0$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

A continuación, se muestra la resolución del cuarto valor de sobreimpulso de la tabla (17), donde  $K_p = 0.00075$ ,  $K_i = 7 \times 10^{-7}$  y  $K_d = 0.009$ .

$$M_p = \frac{(81.7 - 80.63)}{80.63} \times 100 \quad (115)$$

$$M_p = 1.40 \% \quad (116)$$

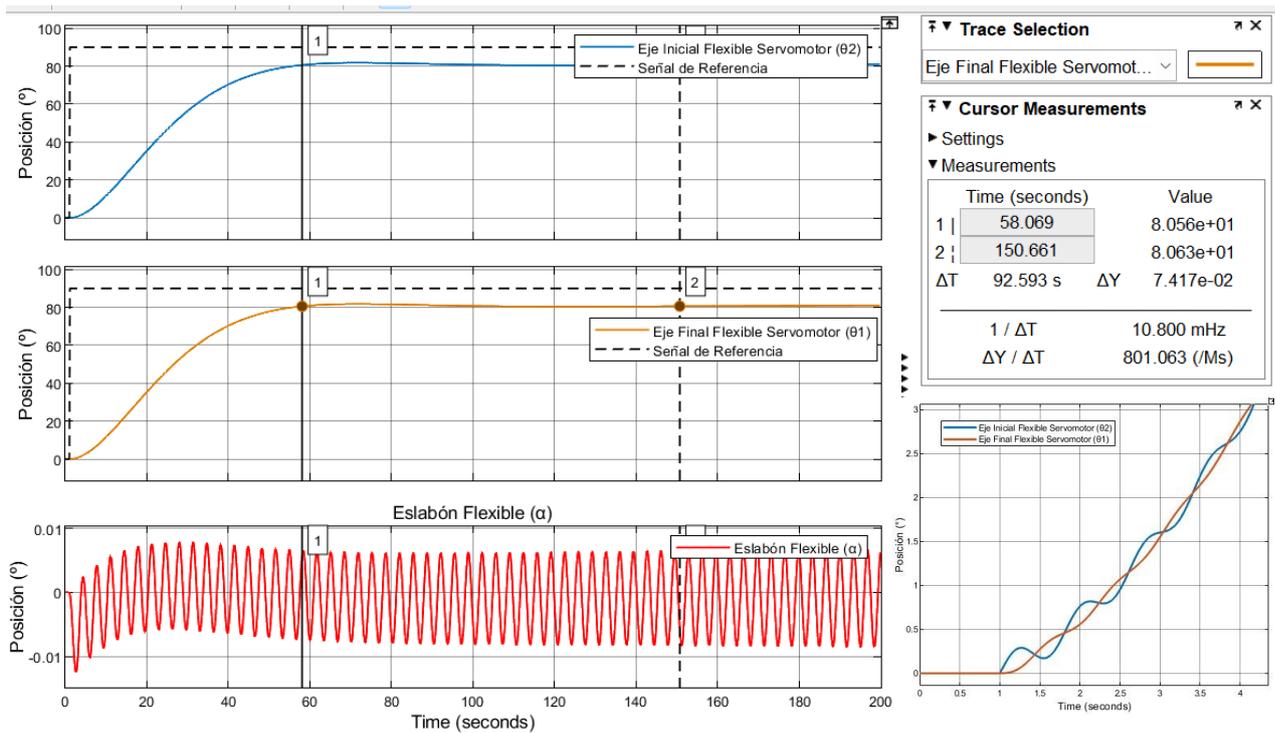


Figura 39. Análisis del valor final del ángulo de  $\theta_1$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

De esta manera, se selecciona como parámetros finales de control en el PID tradicional, los siguientes valores:  $K_p = 0.00075$ ,  $K_i = 7 \times 10^{-7}$  y  $K_d = 0.009$ , considerando el rango de oscilación y el porcentaje de sobreelongación de poca magnitud, los mismos que se emplearán para el control PID fraccionario, y optimizar el sistema de control.

En la figura (39) donde se observa cada una de las salidas ( $\theta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\alpha$ ) del sistema flexible con retroalimentación del PID, en la parte inferior derecha se analiza el comportamiento de  $\theta_2$  y  $\theta_1$  mediante un acercamiento en la simulación al inicio, se observa la respectiva variación de oscilación de ambas salidas debido al comportamiento elástico del sistema,  $\theta_2$  al ser parte inicial de eje del servomotor comienza su oscilación a 1 segundo de simulación, mientras que  $\theta_1$  como parte final del eje del servomotor, comienza su comportamiento oscilatorio a 1.20 segundos aproximadamente.

### 3.2.8 Diseño y desarrollo del controlador PID de orden fraccionario

#### 3.2.8.1 Algoritmo para control PID de orden fraccionario aplica al sistema flexible

Para este tipo de sistemas complejos como son los sistemas flexibles, se ve en la necesidad de poder utilizar otro tipo de procedimiento para ejecutar una correcta implementación del control fraccionario, tomando en consideración los pasos realizados por [44]. Por lo tanto, se considera el siguiente algoritmo para llevar a cabo el diseño del control fraccionario PID en el sistema flexible de articulación y enlace, a diferencia de [44], no se identifica la planta mediante un sistema de primer orden debido a que, no es factible aproximar una función compleja de orden superior a un sistema de orden unitario, ya que el comportamiento dinámico se pierde totalmente, por otra parte, no se considera la aproximación a orden entero empleando la herramienta NINTEGER, debido a que la función “npid” ya no es reconocida por el simulador numérico MATLAB© en sus últimas versiones; de tal manera que, los pasos a plantear en esta investigación se observan en la figura (40).

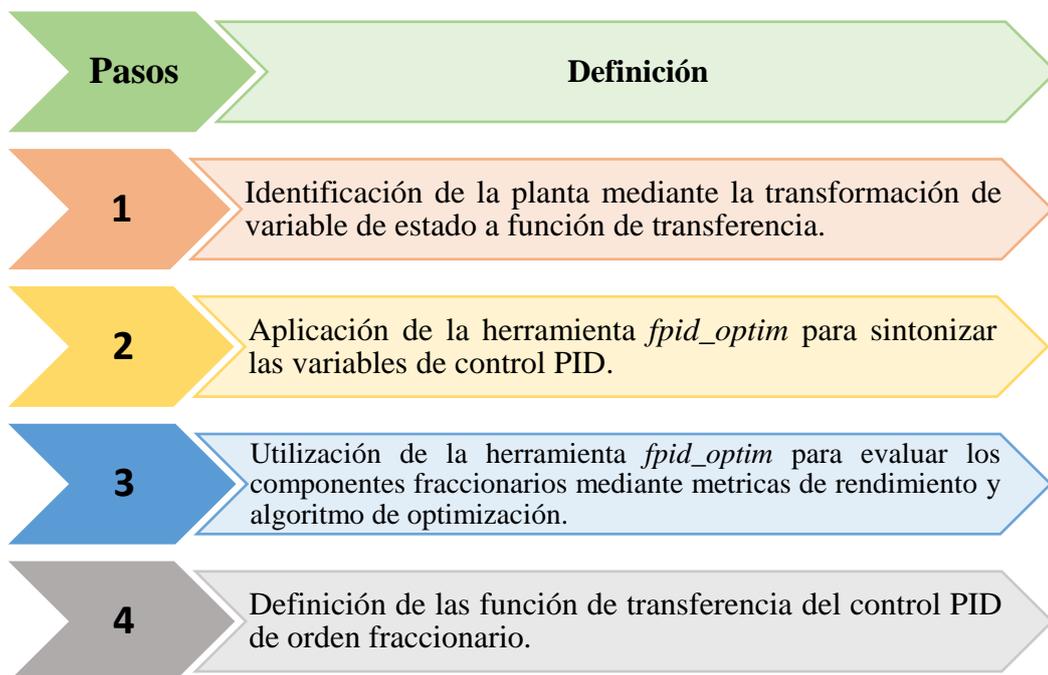


Figura 40. Pasos para el diseño del control fraccionario PID.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.8.2 Identificación de sistema por función de transferencia

Para llevar a cabo la identificación del sistema mediante función de transferencia, y tener una representación matemática donde se pueda llevar el diseño de control de posición en el sistema de eslabón y articulación flexible, se procede a realizar mediante código de programación la transformación de espacio de estados a función de transferencia a través del comando “ss2tf”, se declara cada una de las asignaciones de los parámetros con sus valores correspondientes, considerando los cambios realizados en los momentos de inercia de los parámetros  $J_l$  y  $J_{eq}$  mencionados anteriormente. Por otra parte, como se ha trabajado con un control PID realizado de manera heurística, se realiza en el código del simulador numérico una retroalimentación con las componentes de control establecidas en la sección anterior, y así obtener la función de transferencia de cada una de las salidas.

En la sección anterior los parámetros del control determinados  $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$  fueron aplicados a  $(\theta_2)$ , logrando que las variables de salida  $(\theta_2$  y  $\theta_1)$ , obtengan una estabilidad deseada y comportamiento similar, mientras que la variable  $(\alpha)$  en cambio se ve afectada de manera positiva, para el control del comportamiento de la punta del enlace flexible, esto es debido a que estos comportamientos forman parte de todo el sistema y sus movimientos y dinámicas están correlacionados. Al realizar la conversión de espacio de estados a función de transferencia, no existe ningún tipo de control directo, por lo tanto, se introduce los parámetros de control en  $\theta_1$  y  $\alpha$ , para obtener los comportamientos mencionados como consecuencia de la aplicación de control en la variable  $\theta_2$ .

En la codificación del simulador numérico (figura 41) se presenta el algoritmo para identificar la función de transferencia de la variable  $\theta_2$ , este mismo código se emplea también para obtener las salidas  $\theta_1$  y  $\alpha$ ; para esto, se necesita manipular en la codificación la matriz de estado C, y así identificar cada una de las funciones de transferencia de salida a desear, la configuración que se manipula en cada una de las salidas es con respecto a la posición. Al expresar las salidas en  $\theta_2$ ,  $\theta_1$  y  $\alpha$  se utiliza la retroalimentación con el control PID determinado en la sección anterior.

```

1
2 -   clc
3 -   clear all
4 -   M=1; g=10; d=0.5; K=14; B=0.001; J1=1; J2=0.3; Beq=0.015; Jeq=20.8; J1=0.381; Ks=1.3;
5 -   ng=0.9; nm=0.69; kt=0.00768; km=0.00768; kg=70; Rm=2.6;
6
7 -   A=[0 1 0 0 0 0;-K/J2 ((-ng*nm*kt*km*(kg^2))/(Rm*J2))-(B/J2) K/J2 0 0 0;0 0 0 1 0 0;
8 -       K/J1 (-ng*nm*kt*km*(kg^2))/(Rm*Jeq) ((-M*g*d*(1.74*(10^-4)))-K)/J1 -Beq/Jeq Ks/Jeq 0;
9 -       0 0 0 0 0 1; 0 (ng*nm*kt*km*(kg^2))/(Rm*Jeq) 0 Beq/Jeq -Ks*((J1+Jeq)/(J1*Jeq)) 0];
10 -  B=[0; (ng*nm*kt*kg)/(Rm*J2);0; (ng*nm*kt*kg)/(Rm*Jeq);0; (-ng*nm*kt*kg)/(Rm*Jeq)];
11 -  C=[0 0 1 0 0 0];
12 -  D=[0];
13 -  [num, den]=ss2tf(A, B, C, D)
14 -  H1=tf([num],[den])
15
16 -  % %RETROALIMENTACIÓN
17 -  kp=0.00075;
18 -  ki=0.0000007;
19 -  kd=0.009;
20 -  GPID=tf([kd kp ki],[1 0]);
21 -  HLC1=feedback(GPID*H1,1)
22

```

**Figura 41.** Código transformación de espacio de estados a función de transferencia.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

HLC1 =

$$\frac{0.003852 s^6 + 0.0003238 s^5 + 0.06991 s^4 + 0.005835 s^3 + 0.1962 s^2 + 0.01635 s + 1.526e-05}{s^7 + 0.238 s^6 + 64.14 s^5 + 4.34 s^4 + 210.8 s^3 + 12.2 s^2 + 0.1574 s + 1.526e-05}$$

**Figura 42.** Función de transferencia salida  $\theta_2$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

HLC2 =

$$\frac{5.556e-05 s^6 + 4.815e-06 s^5 + 0.05671 s^4 + 0.004727 s^3 + 0.1962 s^2 + 0.01635 s + 1.526e-05}{s^7 + 0.2342 s^6 + 64.14 s^5 + 4.327 s^4 + 210.8 s^3 + 12.2 s^2 + 0.1574 s + 1.526e-05}$$

**Figura 43.** Función de transferencia salida  $\theta_{1..}$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

HLC3 =

$$\frac{-5.556e-05 s^6 - 4.815e-06 s^5 - 0.003371 s^4 - 0.0002446 s^3 + 5.07e-07 s^2 - 1.852e-07 s - 1.754e-10}{s^7 + 0.2341 s^6 + 64.14 s^5 + 4.267 s^4 + 210.8 s^3 + 12 s^2 + 0.1411 s - 1.754e-10}$$

**Figura 44.** Función de transferencia salida  $\alpha$ .

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

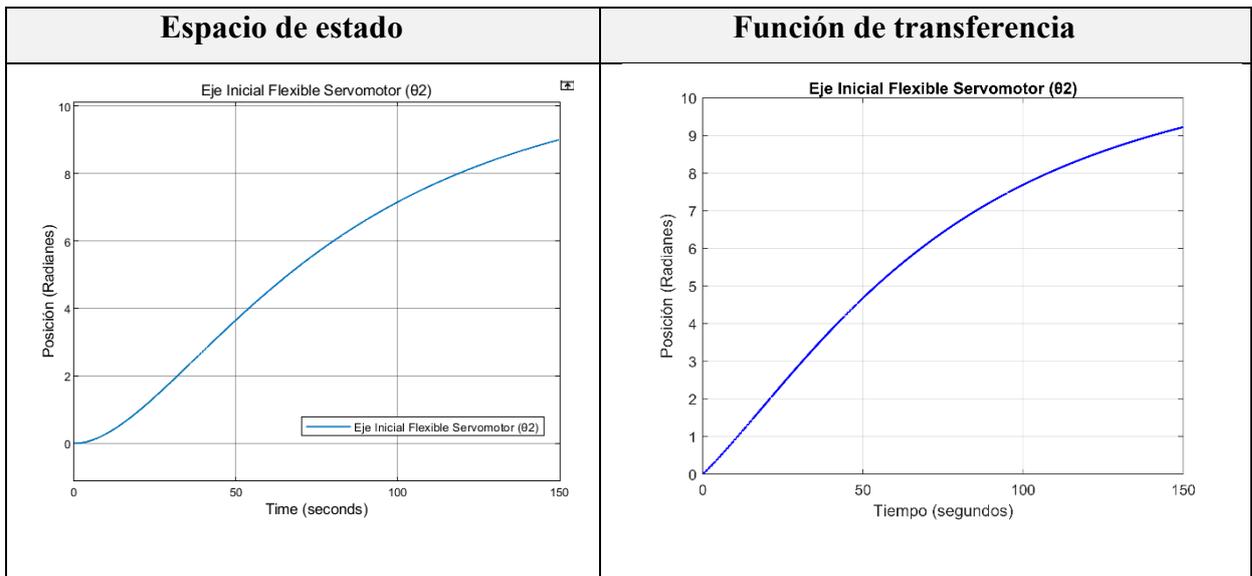
Se obtiene así la matriz de transferencia (117) que representa el comportamiento de cada una de las salidas del sistema flexible en articulación y eslabón.

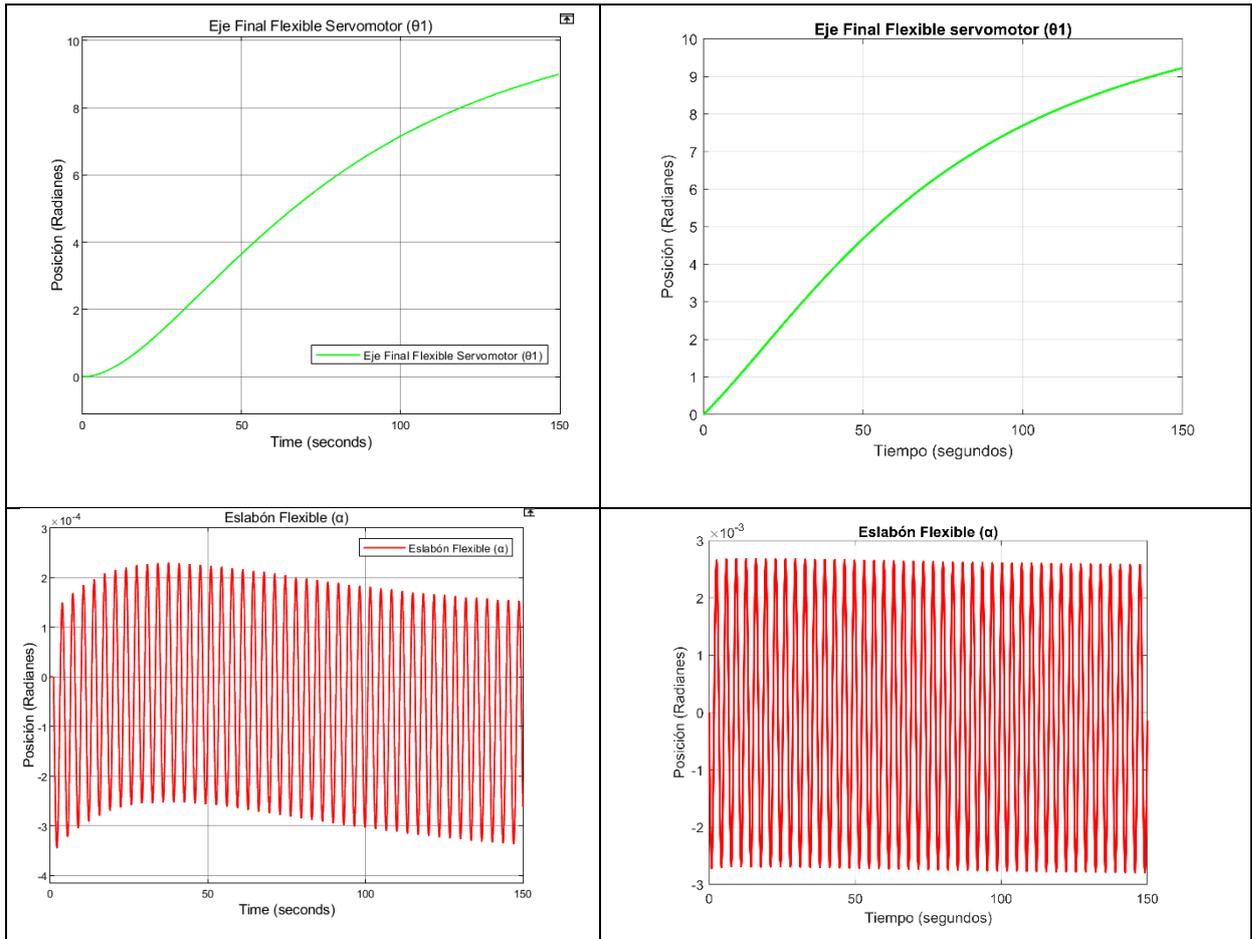
$$\begin{bmatrix} \theta_2(s) \\ \theta_1(s) \\ \alpha(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.003852s^6 + 0.0003238s^5 + 0.06991s^4 + 0.005835s^3 + 0.1962s^2 + 0.01635s + 1.526e - 05}{s^7 + 0.238s^6 + 64.14s^5 + 4.34s^4 + 210.8s^3 + 12.2s^2 + 0.1574s + 1.526e - 05} \\ \frac{5.556e - 05s^6 + 4.815e - 06s^5 + 0.05671s^4 + 0.004727s^3 + 0.1962s^2 + 0.01635s + 1.526e - 05}{s^7 + 0.2342s^6 + 64.14s^5 + 4.327s^4 + 210.8s^3 + 12.2s^2 + 0.1574s + 1.526e - 05} \\ \frac{-5.556e - 05s^6 - 4.815e - 06s^5 - 0.003371s^4 - 0.0002446s^3 + 5.07e - 07s^2 - 1.852e - 07s - 1.754e - 10}{s^7 + 0.2341s^6 + 64.14s^5 + 4.267s^4 + 210.8s^3 + 12s^2 + 0.1411s - 1.754e - 10} \end{bmatrix} \cdot \tau(s) \quad (117)$$

### 3.2.8.3 Comparativa espacio de estados a función de transferencia

Se simula la función de transferencia para poder visualizar el comportamiento del sistema y de que exista la respectiva coincidencia con el sistema en espacio de estados, se observa en la tabla (18) el comportamiento de ambas formas de salida del sistema.

Tabla 18. Comparativo espacio de estados y función de transferencia.





Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.8.4 Métodos de los controles PID fraccionarios para el sistema flexible

La metodología del diseño de control PID fraccionarios, se realiza por medio de combinaciones: método de sintonización, algoritmo de optimización e índice de rendimiento como indica la figura (45), cada una de estas, se desarrollan a través de la herramienta (FPID OPTIMIZATION TOOL) donde se ingresa la función de transferencia determinada para poder desarrollar el control fraccionario.

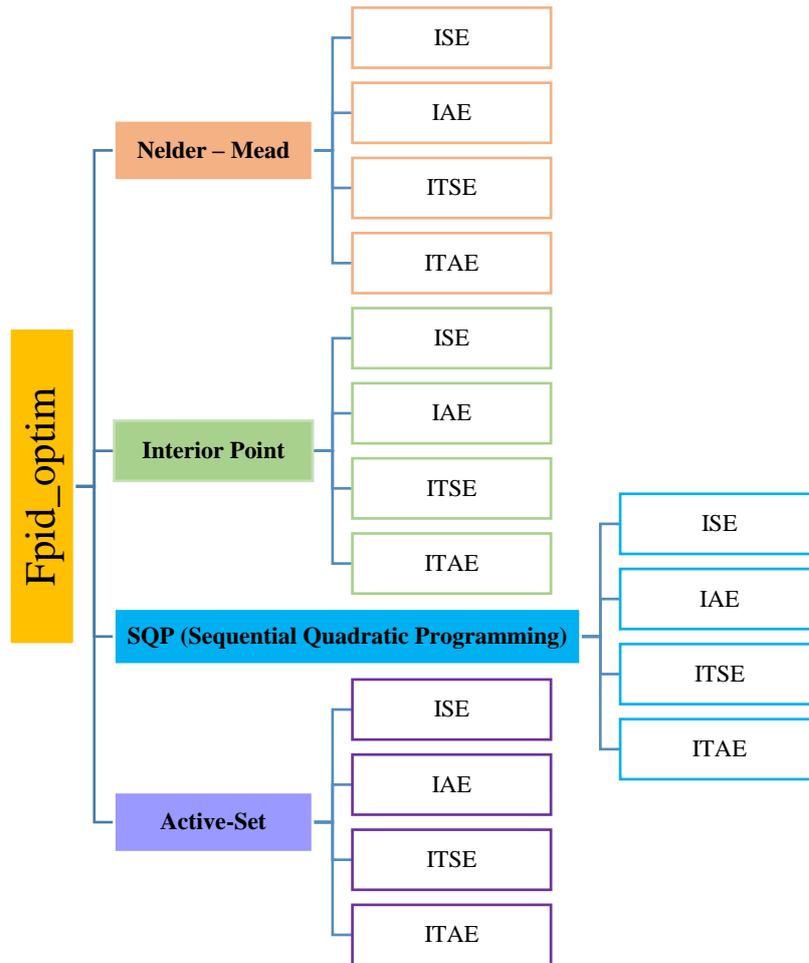


Figura 45. Combinaciones para el desarrollo del control PID fraccionario.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Dentro de los parámetros necesarios para poder llevar a cabo la investigación, se necesita determinar el margen de ganancia y margen de fase de la variable a controlar, para esto se procede a calcular dichos valores mediante el siguiente código en el simulador numérico, como indica la figura (46), el margen de ganancia y fase para este caso se calcula utilizando la función de transferencia de la salida  $\theta_1(s)$  de la matriz de transferencia (117), obteniendo como resultado  $G_{m dB} = 40.0501$  y  $P_m = 129.1948$ .

```

% Calculo margen de fase y ganancia
[Gm, Pm]= margin(2*HLC1);
Gm dB = 20*log10(Gm)
Pm
  
```

Figura 46. Código para el cálculo del margen de ganancia.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.8.5 Herramienta computacional FOMCON para sintonización y simulación del sistema flexible

Se ingresa cada uno de los valores correspondiente por medio de la herramienta computacional FOMCON empleando el comando `fpid_optim`, esta nos permite ingresar la función de transferencia, margen de ganancia y fase del sistema a controlar, y posteriores ajustes como la sintonización de los parámetros PID, señales del control fraccionario PID, algoritmos de optimización y métricas de rendimiento.

Para la utilización del control de PID de orden fraccionario en diagrama de bloques, la herramienta FOMCON ofrece herramientas de bloques para poder trabajar en el entorno de MATLAB© Simulink denominada “FOMCON Toolbox”, se selecciona el bloque “Fractional PID controller”, se le adhiere al sistema de control en diagrama de bloques de la figura (38) y se ingresa cada uno de los parámetros de control determinados por la herramienta “FPID Optimization Tool”, como indica la figura (47).

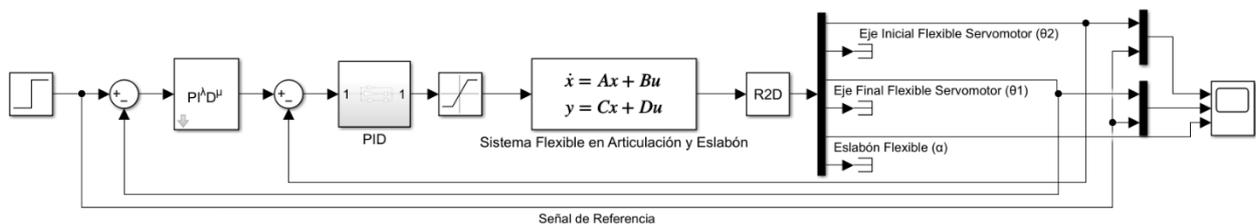


Figura 47. Herramienta "Fractional PID controller" en el diagrama del sistema.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.8.6 Controladores PID de orden fraccionarios para el sistema flexible

En la tabla (19) se presenta cada uno de los componentes de los controladores de orden fraccionario PID determinados, para la base del eslabón flexible del sistema ( $\theta_1$ ), es importante mencionar que en la tabla (19) los nombres de cada uno de los controles está definido por siglas, por ejemplo en el primer controlador tenemos FPO-NM-ISE haciendo referencia a Método de sintonización – Algoritmo de Optimización – Métrica de Desempeño; por otra parte se presenta los valores de respuesta temporal (sobrelongación y tiempo de establecimiento) obtenidos de la aplicación del control a la base del eslabón flexible ( $\theta_1$ ) de manera realimentada, así mismo se detalla la medida del ángulo al que se estabiliza la base del sistema ( $\theta_1$ ), y el rango de oscilación en la punta del eslabón ( $\alpha$ ).

Tabla 19. Componentes del diseño de los controladores PID fraccionarios.

Parámetros de los controladores FOPID							Parámetros de respuesta PID fraccionarios			
N.º	Diseño	$k_p$	$k_i$	$\lambda$	$k_d$	$\mu$	Sobrelongación ( $\theta_1$ )	Base del eslabón ( $\theta_1$ ) (Tiempo de estabilización) [sg]	Valor final ( $\theta_1$ )	Punta del eslabón ( $\alpha$ ) (Rango de oscilación)
1	FPO-NM-ISE	2.7819	0.72573	0.38328	0.068771	0.1783	0%	66.44	80.68°	[0.08522°, -0.08720°]
2	FPO-NM-IAE	4.7772	0.28513	0.48123	0.010281	0.57487	0%	51.84	80.80°	[0.05385°, -0.05541°]
3	FPO-NM-ITSE	4.8697	0.44266	0.47657	0.13646	0.79121	0%	51.57	80.84°	[0.1171°, -0.1180°]
4	FPO-NM-ITAE	4.0807	0.50645	0.43956	0.062274	0.096388	0%	48.91	81.65°	[0.07718°, -0.07788°]
5	FPO-IP-ISE	2.8211	0.73142	0.38996	4.6408e-15	0.49677	0%	69.896	80.95°	[0.09878°, -0.1004°]
6	FPO-IP-IAE	1.4001	5	0.45562	0.48189	0.89999	5.24%	15.22	88.85°	[0.3998°, -0.3917°]
7	FPO-IP-ITSE	3.5973	3.1112e-12	0.7427	4.044e-10	0.66216	0%	52.75	69.23°	[0.02423°, -0.02532°]
8	FPO-IP-ITAE	0.78036	5	0.4492	1.8308e-06	0.095723	11.84%	14.13	88.68°	[0.5420°, -0.5438°]
9	FPO-SQP-ISE	5	1e-05	0.5	1e-05	0.5	0%	53.55	74.18°	[0.03359°, -0.03455°]
10	FPO-SQP -IAE	2.1125	1e-05	0.01	1e-05	0.01001	0%	49.57	59.31°	[0.01396°, -0.01505°]
11	FPO-SQP -ITSE	2.0006	7.6547e-06	0.012864	0.11139	0.42925	0%	52.69	58.43°	[0.07575°, -0.07707°]
12	FPO-SQP -ITAE	2.5621	1e-05	0.01001	1e-05	0.01001	0%	51.00	63.16°	[0.01712°, -0.01795°]
13	FPO-AS-ISE	2.147e-22	3.3515	0.21875	3.3138e-23	0.48889	0%	18.53	82.22°	[0.2874°, -0.2894°]
14	FPO-AS -IAE	1.6278e-07	1.2795e-22	0.57189	2.602	0.022308	0%	51.86	61.11°	[0.02954°, -0.03089°]
15	FPO-AS -ITSE	2.1178e-23	-6.8023e-24	0.012092	2.602	0.022308	0%	51.86	61.11°	[0.02955°, -0.03087°]
16	FPO-AS -ITAE	7.9181e-07	1.7875e-23	0.9941	2.602	0.022308	0%	51.86	61.11°	[0.02953°, -0.03093°]

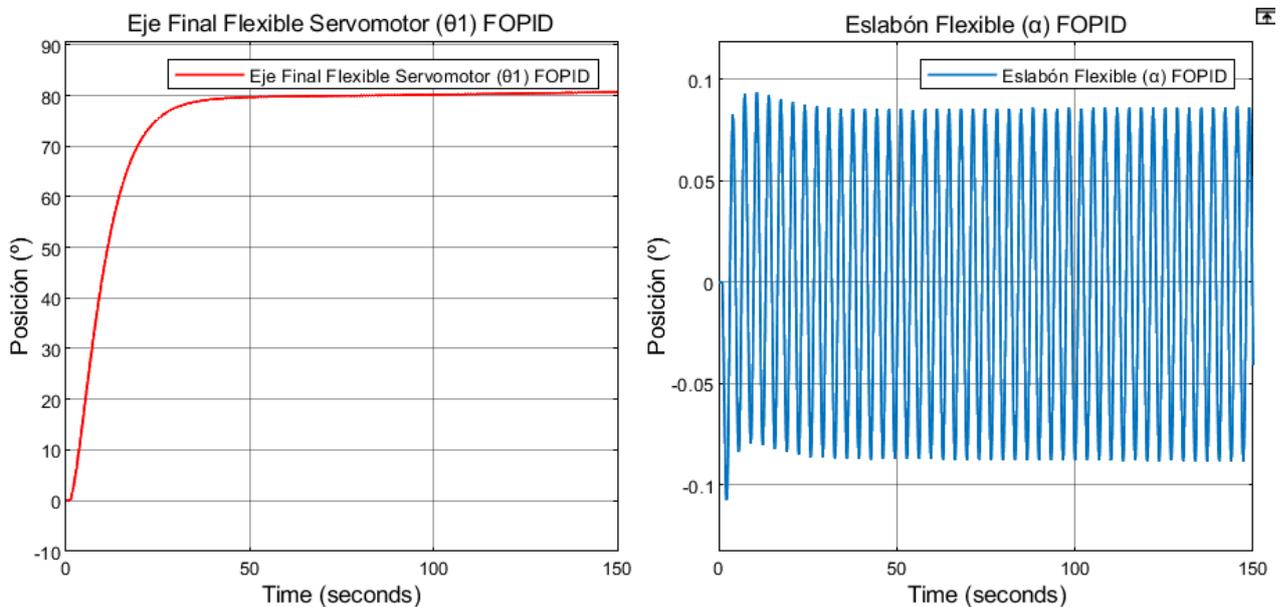
Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### 3.2.8.7 Comportamiento de los controles PID de orden fraccionario aplicados al sistema flexible en articulación y eslabón

A continuación, se detallan las gráficas de los controles obtenidos, a un lado izquierdo se muestra la figura del comportamiento de la base flexible del sistema ( $\theta_1$ ), y en el lado derecho la figura del comportamiento oscilatorio de la punta del eslabón flexible ( $\alpha$ ), para cada uno de ellos se menciona primero la sintonización con “fpid\_optim”, luego el método de optimización y después la métrica de rendimiento, también se expresa la función de transferencia del control fraccionario formada por cada uno de sus parámetros de control.

**Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ISE.**

$$2.7819 + \frac{0.72573}{s^{0.38328}} + 0.068771s^{0.1783} \quad (118)$$

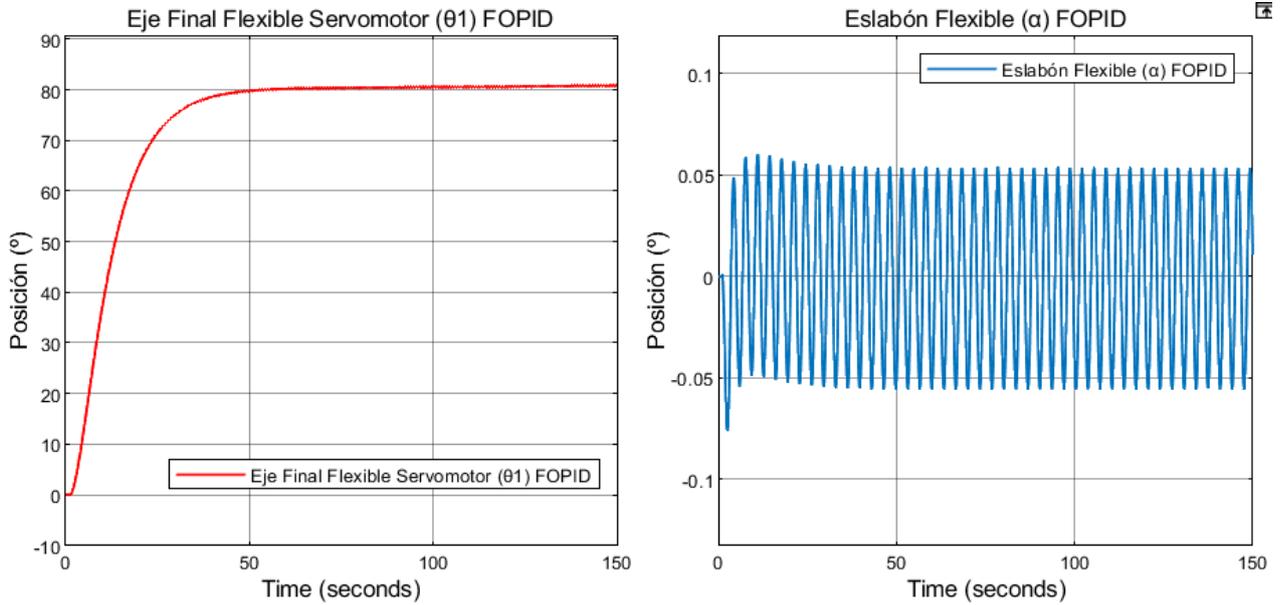


**Figura 48.** Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ISE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, IAE.**

$$4.7772 + \frac{0.28513}{s^{0.48123}} + 0.010281s^{0.57487} \quad (119)$$

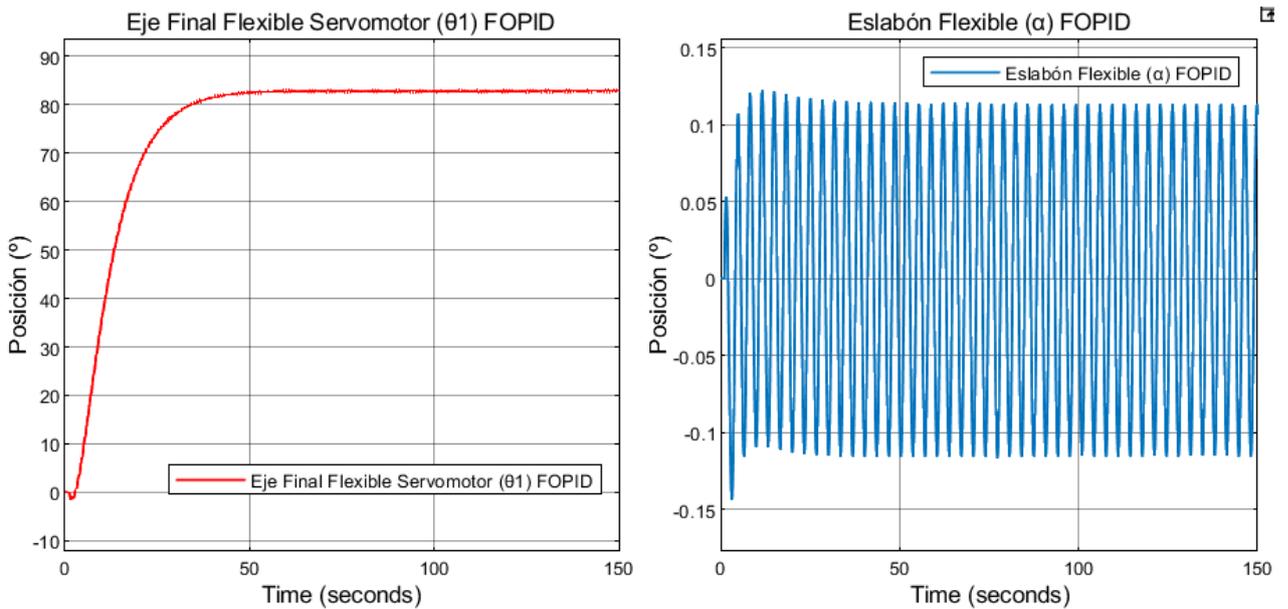


**Figura 49** Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, IAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ITSE.**

$$4.8697 + \frac{0.44266}{s^{0.47657}} + 0.13646s^{0.79121} \quad (120)$$

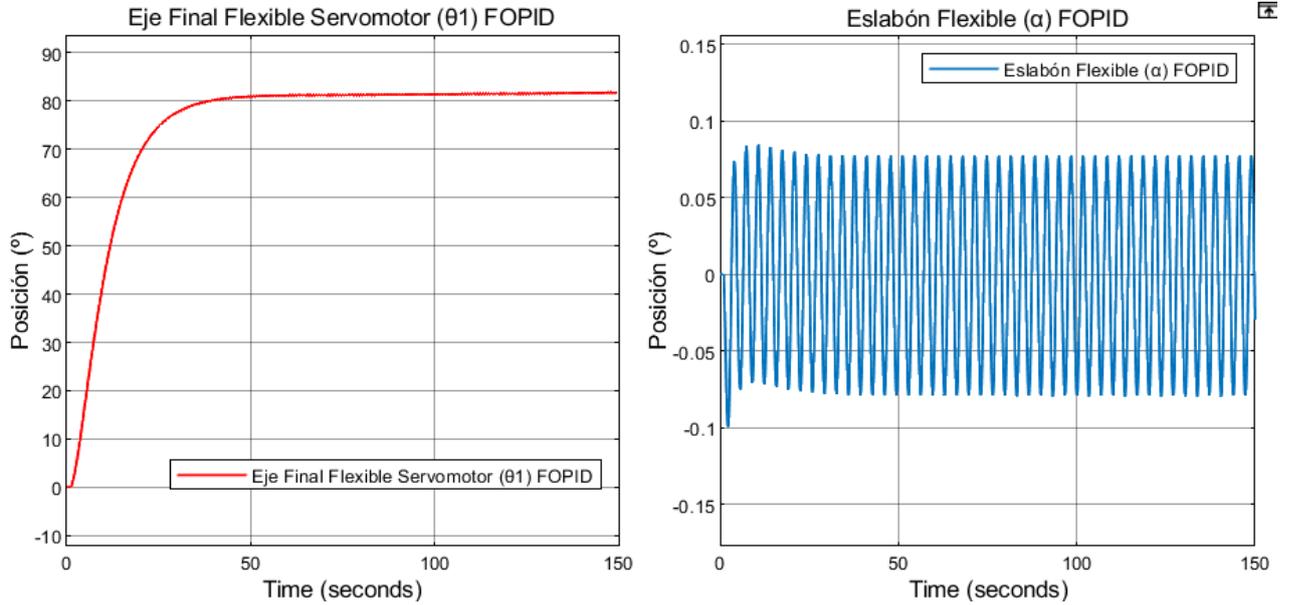


**Figura 50.** Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ITSE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ITAE.**

$$4.0807 + \frac{0.50645}{s^{0.43956}} + 0.062274s^{0.096388} \quad (121)$$

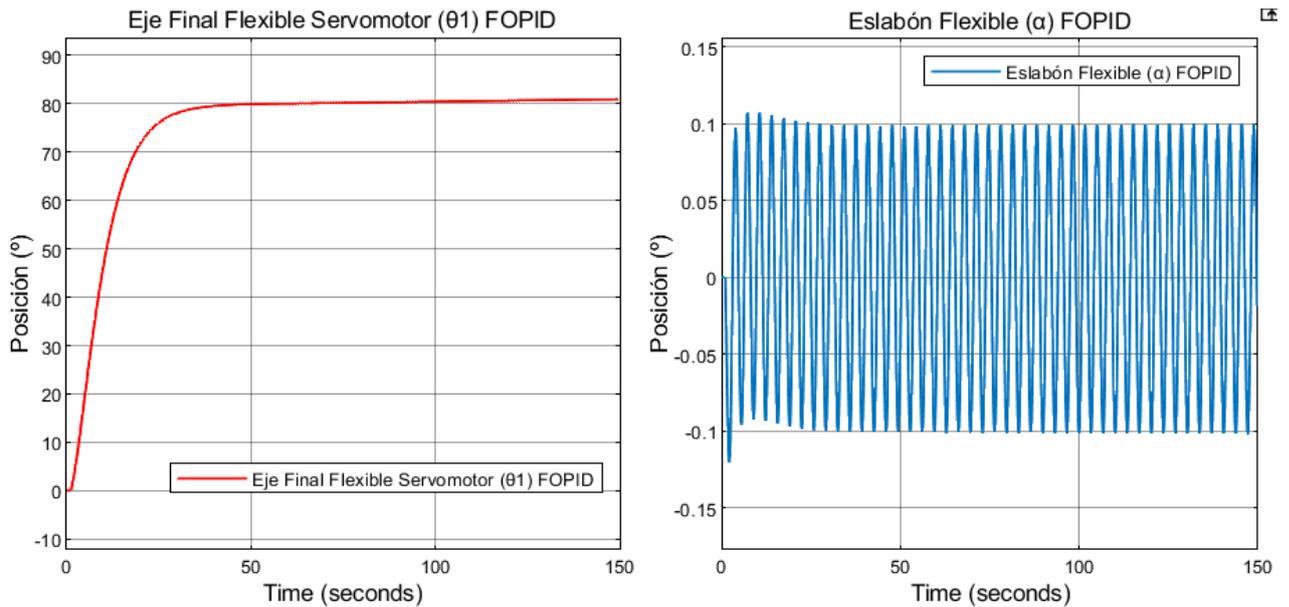


**Figura 51.** Controlador Fpid\_optim, Nealder Mead, ITAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ISE.**

$$2.8211 + \frac{0.73142}{s^{0.38996}} + 4.6408 \times 10^{-15} s^{0.49677} \quad (122)$$

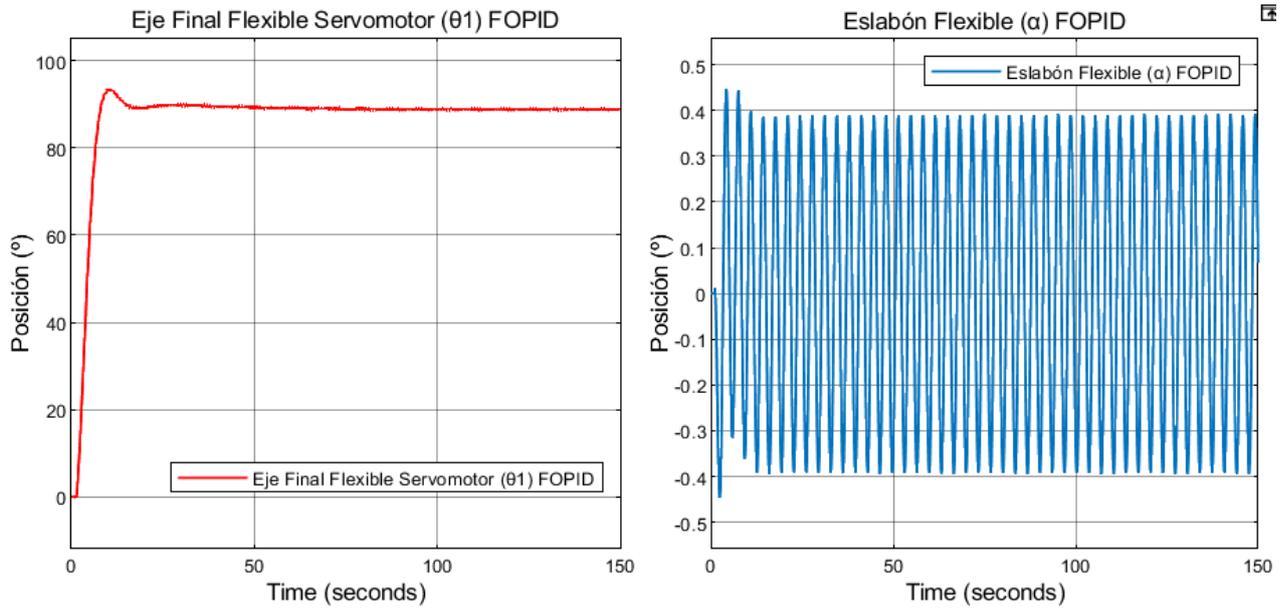


**Figura 52.** Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ISE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Inter Point, IAE.**

$$1.4001 + \frac{5}{s^{0.45562}} + 0.48189s^{0.89999} \quad (123)$$

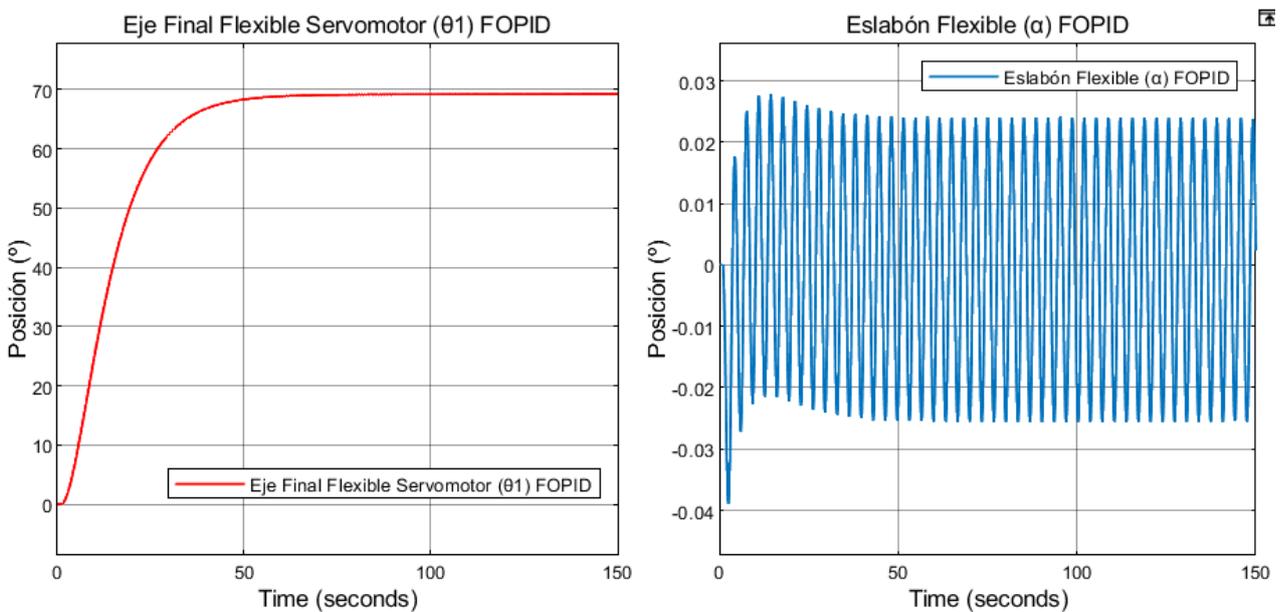


**Figura 53.** Controlador Fpid\_optim, Inter Point, IAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ITSE.**

$$3.5973 + \frac{3.1112 \times 10^{-12}}{s^{0.7427}} + 4.044 \times 10^{-10}s^{0.66216} \quad (124)$$

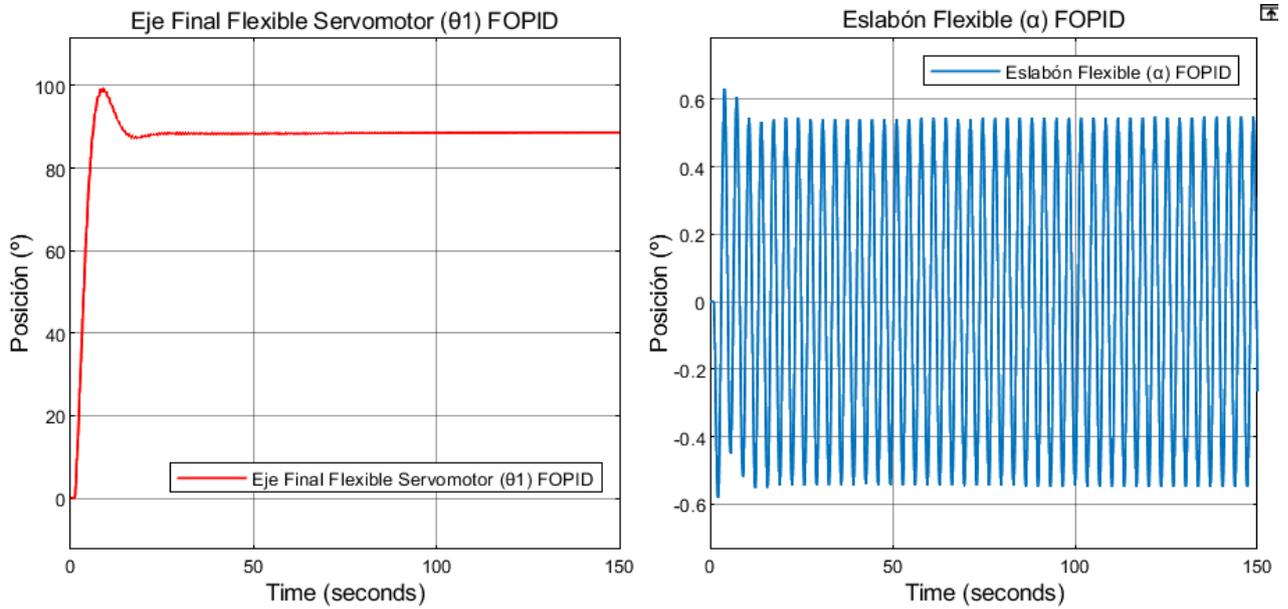


**Figura 54.** Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ITSE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ITAE.**

$$0.78036 + \frac{5}{s^{0.4492}} + 1.8308 \times 10^{-6} s^{0.095723} \quad (125)$$

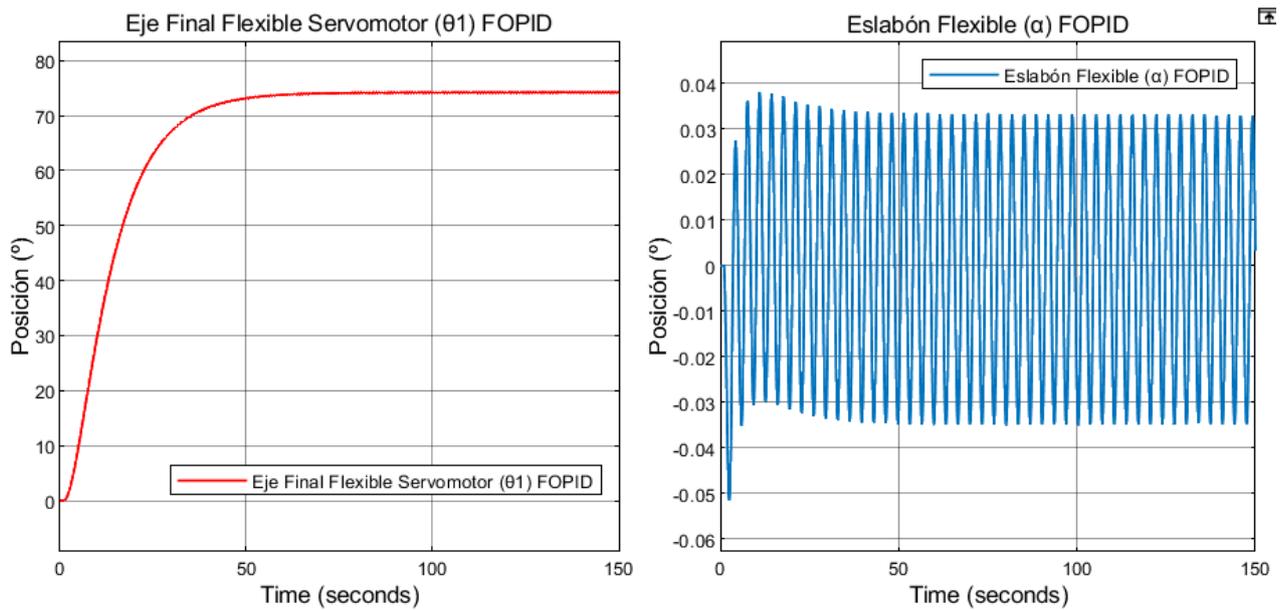


**Figura 55.** Controlador Fpid\_optim, Inter Point, ITAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ISE.**

$$5 + \frac{1 \times 10^{-5}}{s^{0.5}} + 1 \times 10^{-5} s^{0.5} \quad (126)$$

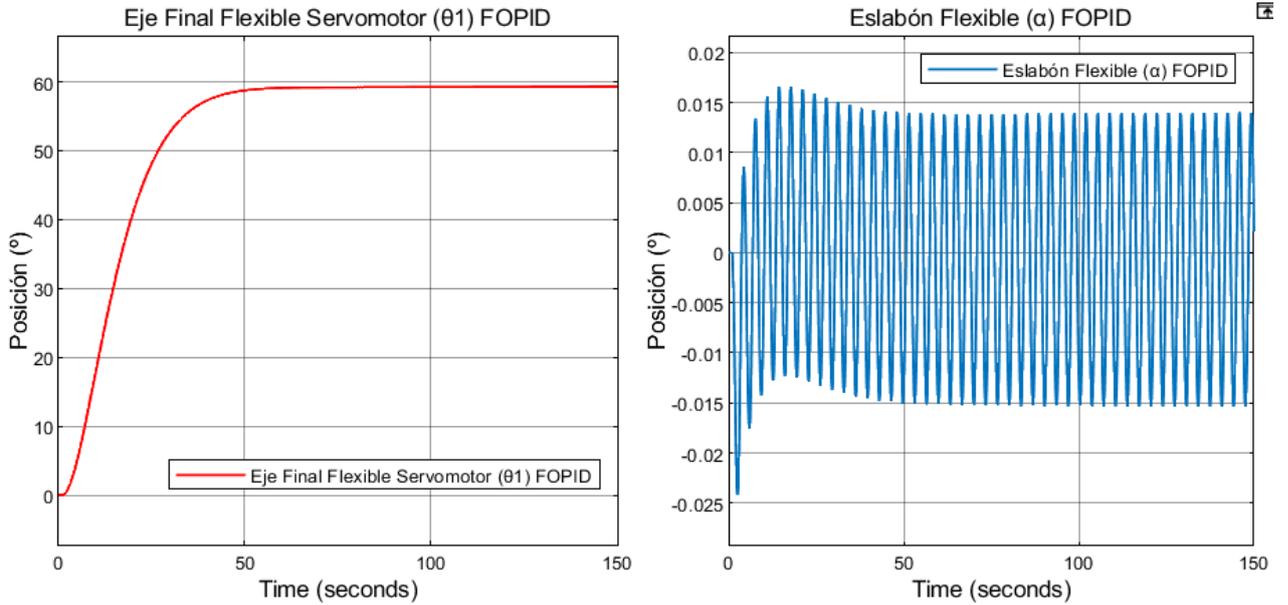


**Figura 56.** Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ISE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, IAE.**

$$2.1125 + \frac{1 \times 10^{-5}}{s^{0.01}} + 1 \times 10^{-5} s^{0.01001} \quad (127)$$

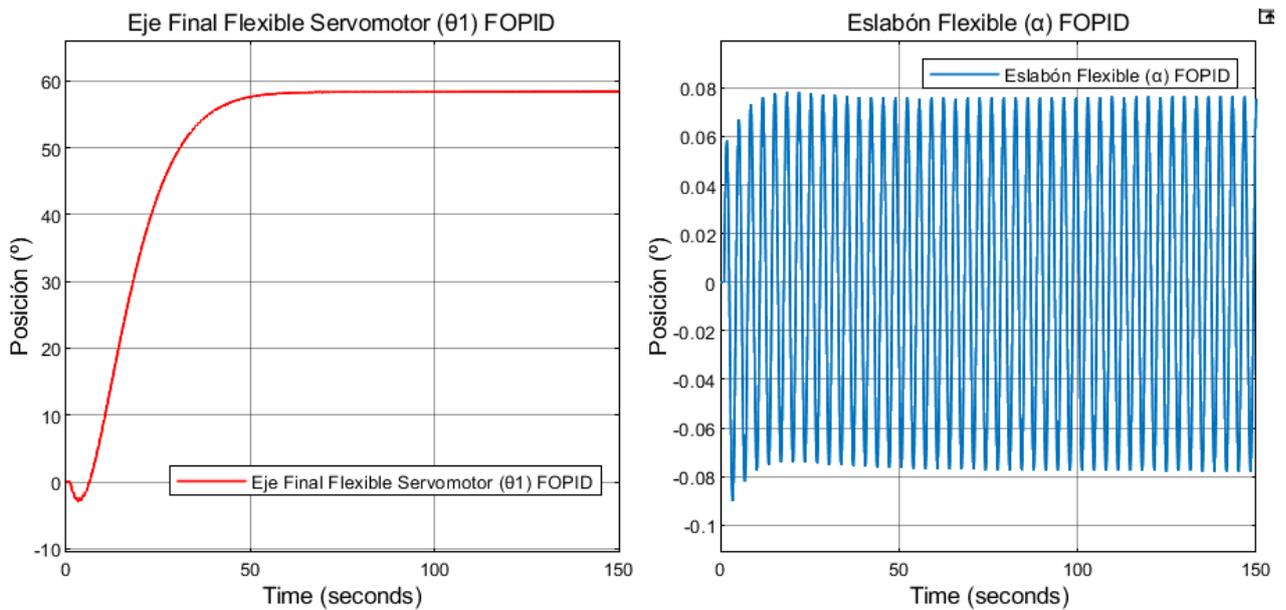


**Figura 57.** Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, IAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ITSE.**

$$2.0006 + \frac{7.6547 \times 10^{-6}}{s^{0.012864}} + 0.11139 s^{0.42925} \quad (128)$$

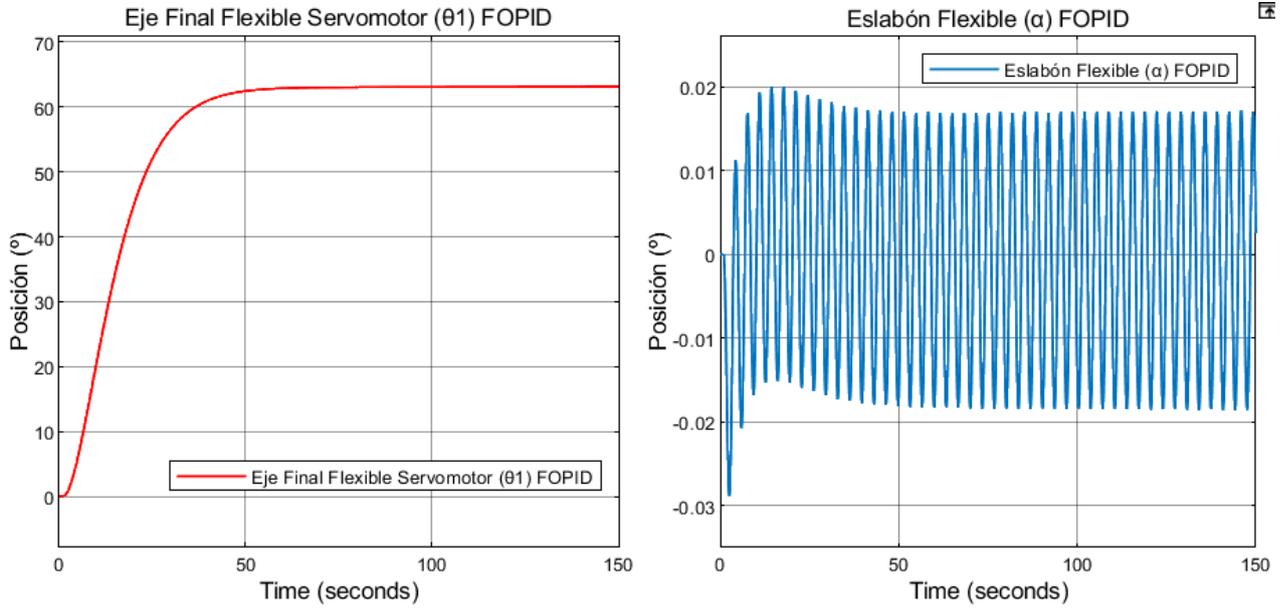


**Figura 58.** Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ITSE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ITAE.**

$$2.5621 + \frac{1 \times 10^{-5}}{s^{0.01001}} + 1 \times 10^{-5} s^{0.01001} \quad (129)$$

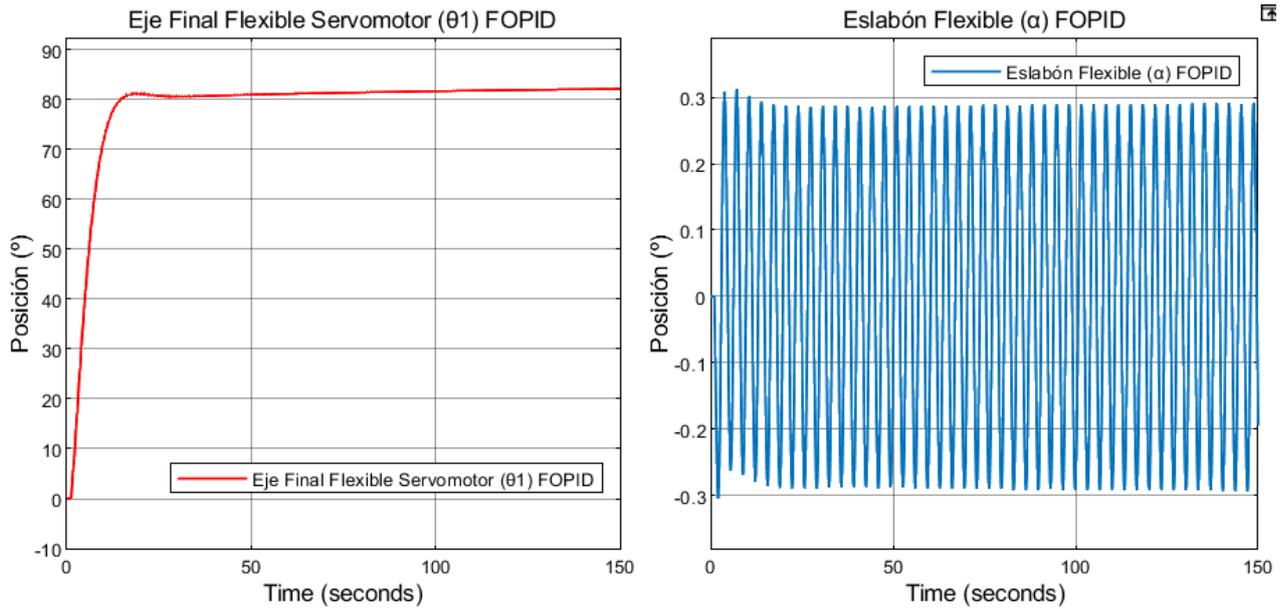


**Figura 59.** Controlador Fpid\_optim, Sequential Quadratic Programming, ITAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Active Set, ISE.**

$$2.147 \times 10^{-22} + \frac{3.3515}{s^{0.21875}} + 3.3138 \times 10^{-23} s^{0.48889} \quad (130)$$

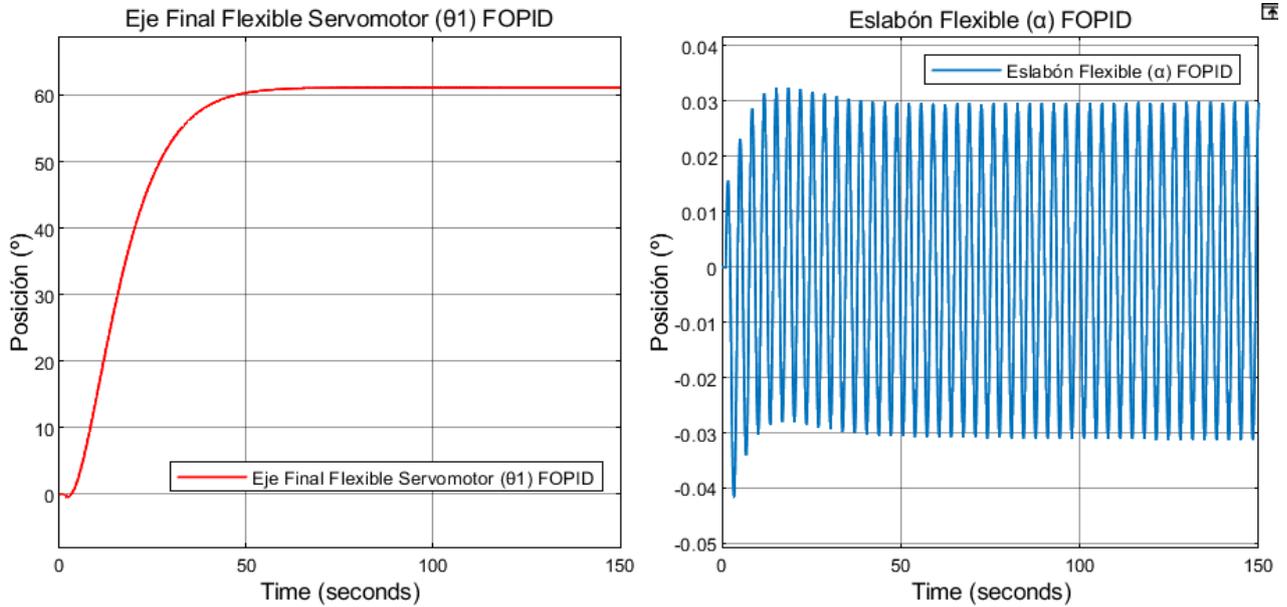


**Figura 60.** Controlador Fpid\_optim, Active Set, ISE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Active Set, IAE.**

$$1.6278 \times 10^{-7} + \frac{1.2795 \times 10^{-22}}{s^{0.57189}} + 2.602s^{0.022308} \quad (131)$$

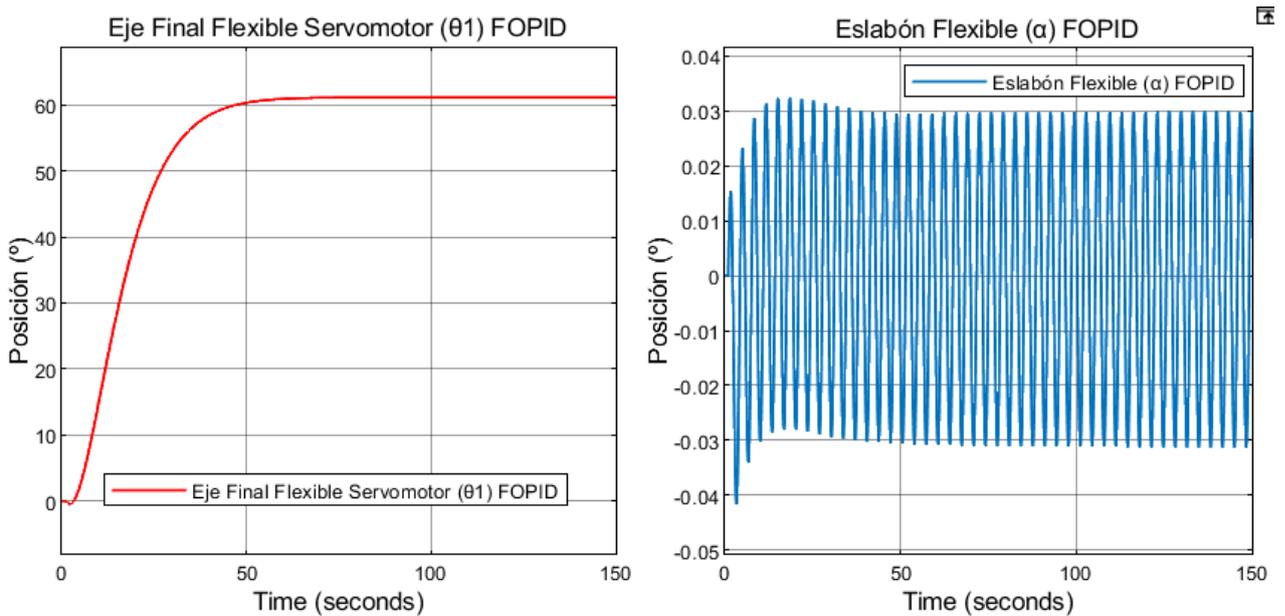


**Figura 61.** Controlador Fpid\_optim, Active Set, IAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

**Controlador Fpid\_optim, Active Set, ITSE.**

$$2.1178 \times 10^{-23} - \frac{6.8023 \times 10^{-24}}{s^{0.012092}} + 2.602s^{0.022308} \quad (132)$$

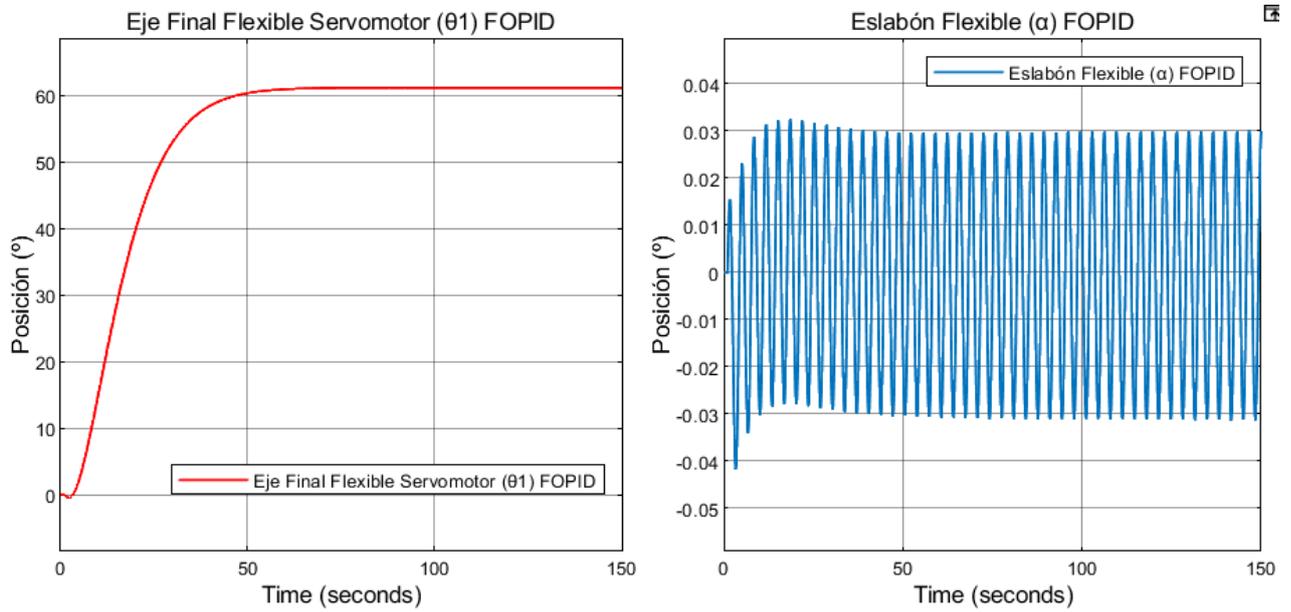


**Figura 62.** Controlador Fpid\_optim, Active Set, ITSE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

### Controlador Fpid\_optim, Active Set, ITAE.

$$7.9181 \times 10^{-7} + \frac{1.7875 \times 10^{-23}}{s^{0.9941}} + 2.602s^{0.022308} \quad (133)$$



**Figura 63.** Controlador Fpid\_optim, Active Set, ITAE.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

## CAPITULO IV

### 4. Evaluaciones y resultados

En este capítulo se presentan las evaluaciones del comportamiento del control en la base, y que tipo de comportamiento se obtiene en la punta del sistema; se identifica los mejores controladores y se realiza un análisis de las métricas de rendimiento de los controles seleccionados en la base del eslabón; se hace una comparativa con un PID tradicional para evaluar qué tipo de comportamientos se tuvieron con respecto al control fraccionario aplicado a la base ( $\theta_1$ ), y que cambios produce esto en la oscilación de la punta del eslabón ( $\alpha$ ).

#### 4.1 Análisis del rendimiento de los controladores.

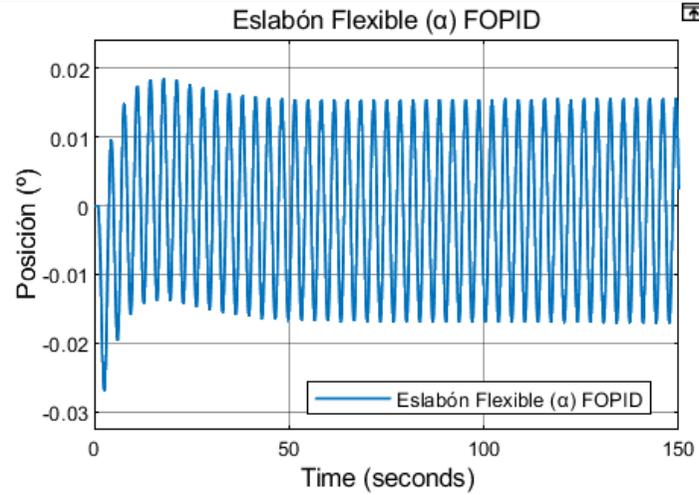
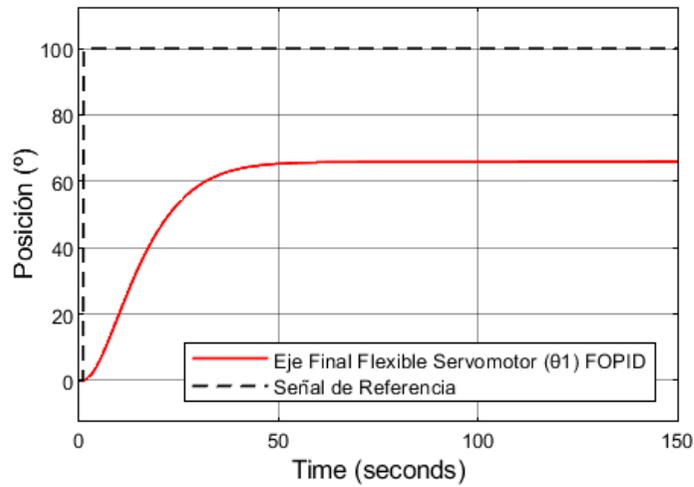
Se presentan en la tabla (20) los mejores resultados obtenidos de cada uno de los controladores diseñados en el capítulo anterior, se consideran los mejores controles aquellos que presentan un rango de oscilación en la punta, menor a  $0.05^0$ , considerando que la prioridad dentro del sistema de control se encuentra en la punta ( $\alpha$ ). Además, se realiza un análisis de los índices de desempeño de la respuesta de cada uno de los controladores, variando la señal de referencia cerca del punto de operación donde el sistema fue linealizado, en este caso se trabaja ahora con  $100^0$ .

##### 4.1.1 Análisis y comparativa de los parámetros temporales.

Las respuestas de la selección de los controladores en la tabla (20) se agrupan dependiendo del tipo de algoritmo de optimización: Nealder Mead, Inter Point, SQP (Sequential Quadratic Programming), Active Set, cada uno de estos análisis se llevan a cabo con una señal de referencia de  $100^0$ , considerando que es un valor cercano al punto de operación de  $90^0$ . Posterior aquello se realiza la comparativa respectiva para presentar los mejores resultados de control en el sistema flexible en articulación y eslabón.

Tabla 20. Respuesta de los sistemas de control

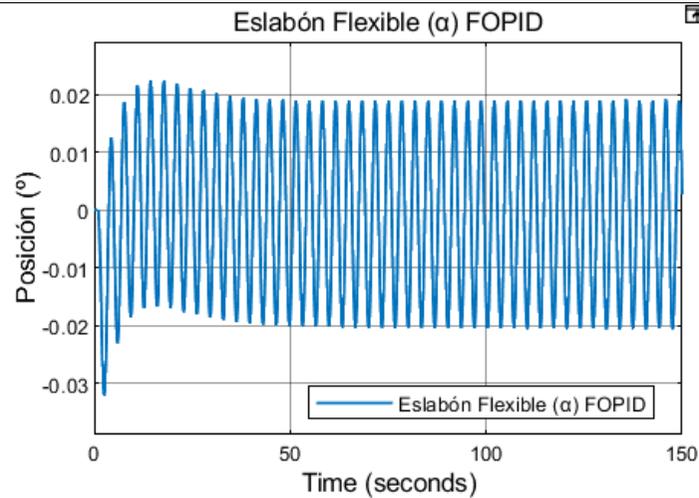
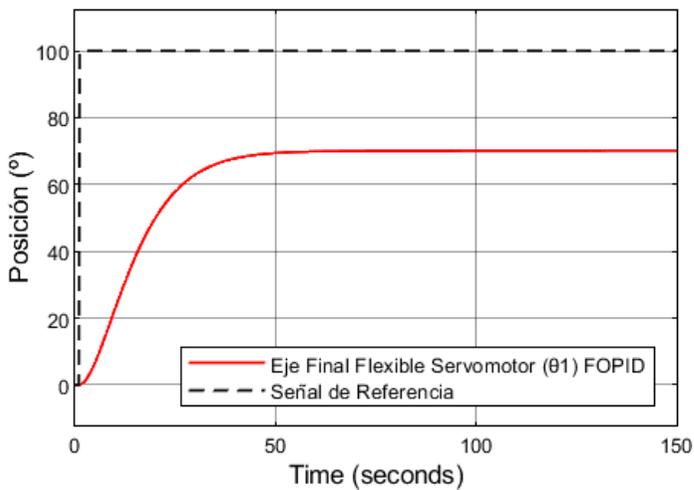
Comportamiento del sistema		Caracterización del sistema de control
<b>Algoritmo de optimización: Inter Point</b>		
		<p><b>-Índice de desempeño: ITSE</b></p> <p><b>-Parámetros:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_p=3.5973</math></li> <li>• <math>K_i=3.1112e - 12</math></li> <li>• <math>\lambda = 0.7427</math></li> <li>• <math>K_d=4.044e - 10</math></li> <li>• <math>\mu =0.66216</math></li> </ul>
<b>Algoritmo de optimización: SQP (Sequential Quadratic Programming)</b>		
		<p><b>-Índice de desempeño: ISE</b></p> <p><b>-Parámetros:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>K_p=5</math></li> <li>• <math>K_i=1e - 05</math></li> <li>• <math>\lambda = 0.5</math></li> <li>• <math>K_d=1e - 05</math></li> <li>• <math>\mu = 0.5</math></li> </ul>



-Índice de desempeño: IAE

-Parámetros:

- $K_p=2.1125$
- $K_i=1e-05$
- $\lambda = 0.01$
- $K_d=1e-05$
- $\mu = 0.01001$

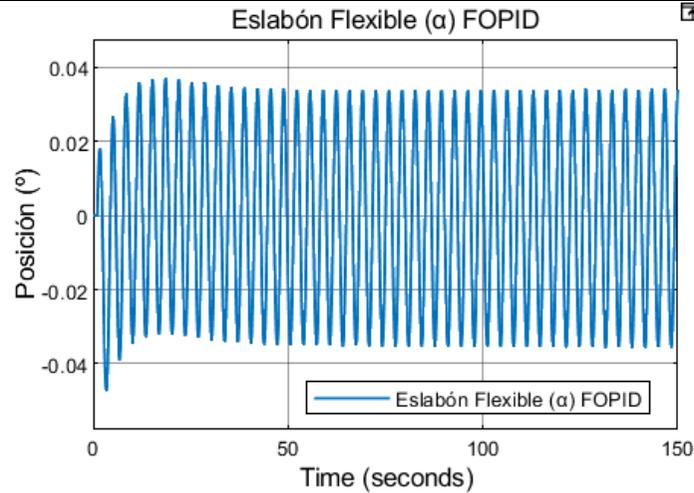
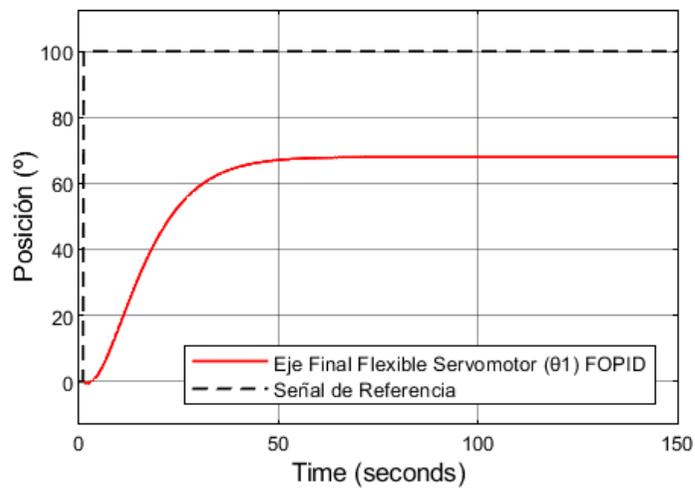


-Índice de desempeño: ITAE

-Parámetros:

- $K_p=2.5621$
- $K_i=1e-05$
- $\lambda = 0.01001$
- $K_d=1e-05$
- $\mu = 0.01001$

### Algoritmo de optimización: Active Set



-Índice de desempeño: ITSE

-Parámetros:

- $K_p = 2.1178e - 23$
- $K_i = -6.8023e - 24$
- $\lambda = 0.012092$
- $K_d = 2.602$
- $\mu = 0.022308$

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

#### 4.1.1.1 Parámetros de respuesta de la evaluación de los controles PID de orden fraccionario

Dentro del análisis realizado se sigue considerando el criterio del  $\pm 1\%$  para el tiempo de establecimiento del sistema, en la siguiente tabla (21) se presenta el porcentaje de sobreelongación, tiempo de establecimiento, ángulo final de la base del eslabón y el rango de oscilación de la punta de los mejores controles seleccionados.

**Tabla 21.** Parámetros de respuesta de los controladores PID fraccionarios.

<b>Parámetros de respuesta de los controles PID fraccionarios</b>					
<b>N.º</b>	<b>Diseño</b>	<b>Sobrelongación (<math>\theta_1</math>)</b>	<b>Base del eslabón (<math>\theta_1</math>) (Tiempo de estabilización) (sg)</b>	<b>Valor final (<math>\theta_1</math>)</b>	<b>Punta del eslabón (<math>\alpha</math>) (Rango de oscilación) (°)</b>
1	FPO-IP-ITSE	0%	52.71	76.93 <sup>0</sup>	[0.02707 <sup>0</sup> , -0.02799 <sup>0</sup> ]
2	FPO-SQP-ISE	0%	54.04	82.43 <sup>0</sup>	[0.03724 <sup>0</sup> , -0.03856 <sup>0</sup> ]
3	FPO-SQP -IAE	0%	49.72	65.90 <sup>0</sup>	[0.01546 <sup>0</sup> , -0.01679 <sup>0</sup> ]
4	FPO-SQP -ITAE	0%	50.98	70.18 <sup>0</sup>	[0.01881 <sup>0</sup> , -0.02028 <sup>0</sup> ]
5	FPO-AS -ITSE	0%	52.23	67.91 <sup>0</sup>	[0.03398 <sup>0</sup> , -0.03496 <sup>0</sup> ]

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

De la tabla (21) se observa que los mejores controladores a considerar son FPO\_IP\_ITSE, FPO\_SQP\_IAE y FPO\_SQP\_ITAE debido a que su rango de oscilación en la punta se mantiene en valores de oscilación inferiores a 0.03<sup>0</sup>, considerados como respuestas críticamente estables. Se analiza también que el valor final de ángulo ( $\alpha$ ) no se acerca a la señal de referencia de 100<sup>0</sup>, debido a que se ha tomado como prioridad la precisión de la punta del sistema ( $\alpha$ ), tomando un rango de oscilación de magnitud mínima arriesgando un poco a la base del sistema flexible ( $\theta_1$ ).

#### **4.1.2 Análisis del rendimiento basado en los índices de error**

En esta sección se identifica los mejores controladores y se realiza un análisis de las métricas de rendimiento de los controles seleccionados en la base del eslabón. El análisis de rendimiento de un sistema de control que está fundamentado en los parámetros de error como indica [50] se basa en la cantidad de error acumulativo, este parámetro equivale a la diferencia entre el valor esperado y el valor de salida, entre menor sea el parámetro del error acumulativo, será mejor el valor de desempeño del controlador. Los criterios empleados se muestran a continuación:

- Integral del error Absoluto (IAE)
- Integra del tiempo por el error absoluto (ITAE)
- Integral de error cuadrático (ISE)
- Integral del tiempo por el error cuadrático (ITSE)

#### 4.1.2.1 Métricas de desempeño de los controladores fraccionarios PID

En la tabla (22) se muestran las medidas de desempeño de los controladores seleccionados aplicados a la base del eslabón ( $\theta_1$ ), que cumplen con las mejores características de respuesta.

Tabla 22. Índice de desempeño de los controladores.

N.º	Método	$K_p$	$K_i$	$\lambda$	$K_d$	$\mu$	IAE	ITAE	ISE	ITSE
1	FPO_IP_ITSE	3.5973	$3.1112e - 12$	0.7427	$4.044e - 10$	0.66216	4560e-05	2.736	1.838	70.34
2	FPO_SQP_ISE	5	$1e - 05$	0.5	$1e - 05$	0.5	3771e-05	2.12	1.429	43.87
3	FPO_SQP_IAE	2.1125	$1e - 05$	0.01	$1e - 05$	0.01001	6121e-05	3.969	2.878	143.4
4	FPO_SQP_ITAE	2.5621	$1e - 05$	0.01001	$1e - 05$	0.01001	5519e-05	3.491	2.44	111.9
5	FPO_AS_ITSE	$2.1178e - 23$	$-6.8023e - 24$	0.012092	2.602	0.022308	5946e-05	3.759	2.81	129.9

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Los valores de métricas (IAE, ISE, ITAE, ITSE) de la tabla (22) son escalados dividiendo sus valores por el factor de  $10^{-5}$ , con el fin de obtener una mejor visibilidad de los parámetros, debido a que al inicio en los resultados se obtienen valores de gran magnitud; este ajuste que se realiza mantiene la relación de las métricas sin alterar la información entre cada uno de ellos, obteniendo así la presentación de las medidas en una escala más comprensible. La obtención de magnitudes grandes en las métricas de rendimiento se debe, a que estas configuraciones de rendimiento trabajan con respecto al tiempo de simulación, para un sistema que se estabiliza en tiempo muy cortos, las métricas obtenidas serán pequeñas, para este caso de estudio, al obtener tiempos de estabilización prolongados, considerando que la prioridad es la reducción de la oscilación en la punta del sistema flexible ( $\alpha$ ), se obtienen métricas de rendimiento con gran magnitud.

En la tabla (22), se analiza que los controladores que abarcan un mejor rendimiento son FPO-IP-ITSE y FPO-SQP-ISE, es decir sintonizados con la herramienta Fpid Optimization Tools, algoritmo de optimización Inter Point y SQP (Sequential Quadratic Programming), con índices de desempeño ITSE e ISE respectivamente, considerando la teoría que mientras la magnitud del índice de error sea mínima, el rendimiento del controlador será mejor, estas mediciones de índices de error son con respecto a la base del sistema flexible ( $\theta_1$ ).

#### 4.1.3 Análisis y comparativa control PID y FOPID

En la figura (64) se aprecia cada uno de los controles fraccionarios seleccionados aplicados en la base ( $\theta_1$ ), y el efecto que tienen los mismos en la punta del eslabón ( $\alpha$ ), se detalla también el comportamiento del control PID tradicional para poder analizar su comparativa con la optimización del PID fraccionario, todo el sistema se evalúa con una señal de referencia de  $100^\circ$ . Se aprecia en la figura (64) que las oscilaciones en la punta del eslabón ( $\alpha$ ) en comparativa con el movimiento de posición en la base ( $\theta_1$ ) no tienen mucha apreciación, debido al rango de magnitud mínimo que posee.

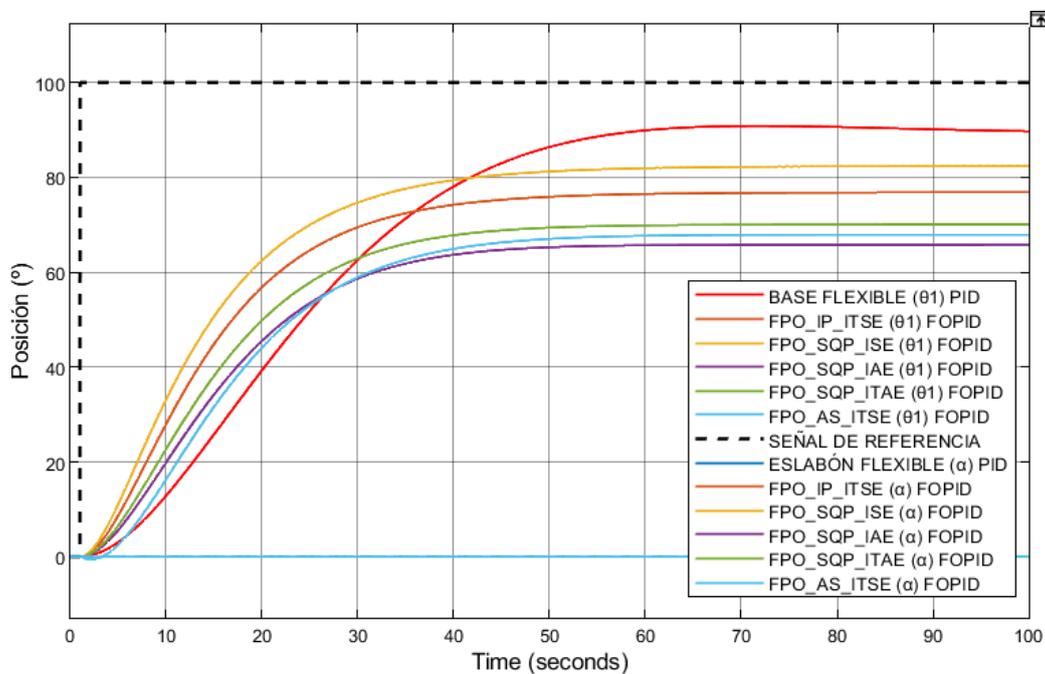


Figura 64. Control PID tradicional y control PID fraccionario en base y eslabón flexible.

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

#### 4.1.3.1 Análisis base del eslabón flexible ( $\theta_1$ )

En la gráfica (65) se puede visualizar la comparativa entre el control PID realizado al sistema flexible, como parte del inicio de la investigación para poder controlar el sistema, y posterior se observa los mejores controles PID fraccionarios seleccionados con cada una de sus características descritas con anterioridad. Se aprecia también que el control PID de orden fraccionario busca optimizar el sistema, obteniendo un tiempo de estabilización (criterio 1%) más corto, en este caso FPO\_IP\_ITSE ( $\theta_1$ ) con  $t_s = 52.71$  sg, FPO\_SQP\_ISE ( $\theta_1$ ) con  $t_s = 54.04$  sg, FPO\_SQP\_IAE ( $\theta_1$ ) con  $t_s = 49.72$  sg, FPO-SQP -ITAE con  $t_s = 50.98$  sg y FPO-AS\_ITSE ( $\theta_1$ ) con  $t_s = 52.23$  sg.

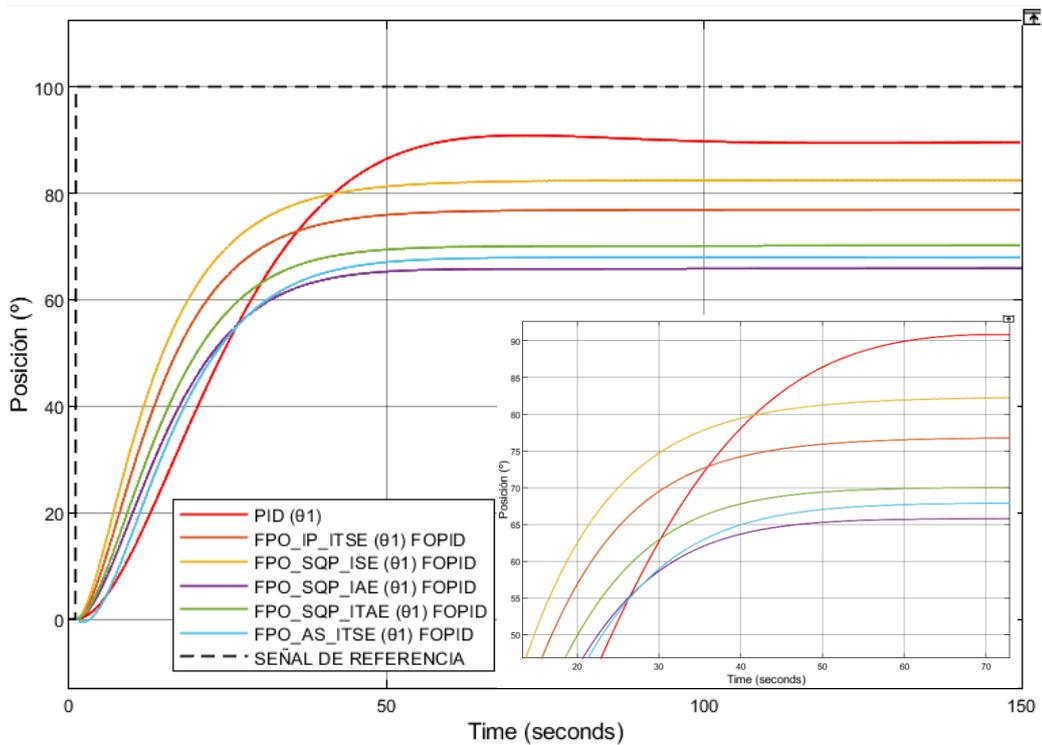


Figura 65. Evaluación controles PID fraccionarios y PID tradicional base eslabón ( $\theta_1$ ).

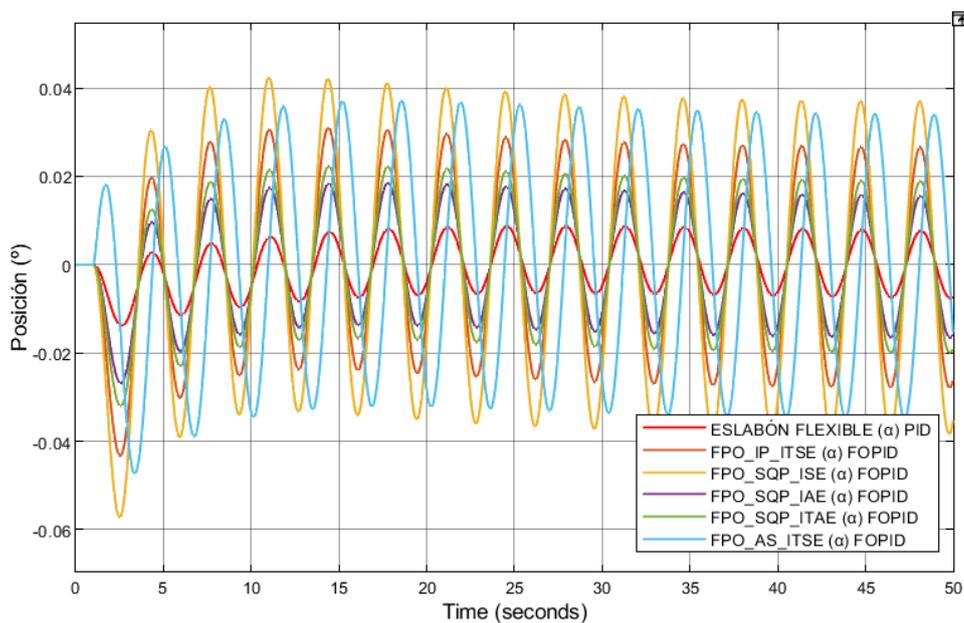
Realizado por: Luis Panchana, 2024.

Es importante mencionar que en la figura (65) no se llega a la señal de referencia de  $100^0$  que es valor que se trabaja en esta evaluación, tanto para el PID tradicional, como también para el PID de orden fraccionario, se arriesga esa parte del control para obtener un rango de oscilación no tan alterado en la punta del sistema ( $\alpha$ ), considerando como prioridad la precisión en el efector final, visto como una necesidad importante en aplicaciones donde la estabilidad y la precisión en la parte final del eslabón tiene más relevancia que la respuesta de la base del sistema flexible

$(\theta_1)$ .

#### 4.1.3.2 Análisis punta del eslabón flexible ( $\alpha$ )

En la figura (66) se visualiza cada uno de los comportamientos de los rangos de oscilación del efector final del sistema flexible ( $\alpha$ ), como consecuencia de los controles PID fraccionarios aplicados a la base ( $\theta_1$ ), como también el PID tradicional, las oscilaciones de los controles fraccionarios tienen una amplitud mayor que el PID común, debido a la optimización realizada por el controlador fraccionario, para que se establezca el sistema en un tiempo más corto.



**Figura 66.** Evaluación controles PID fraccionarios y PID tradicional base eslabón ( $\alpha$ ).

Realizado por: Luis Panchana, 2024.

## CONCLUSIONES

- La integración de la dinámica de un sistema en articulación y eslabón flexible permite un marco de referencia mejorado para futuras investigaciones con respecto a la representación matemática del sistema, aportando en el modelado y simulación de otros sistemas complejos como son los robots flexibles con más de un eslabón o los robots colaborativos.
- Para la formación de un solo sistema de articulación y eslabón, se manipulan los parámetros de momento de inercia del eslabón flexible  $J_l$ , y el momento de inercia de la articulación flexible  $J_{eq}$ , considerando la investigación [53] de cada uno de los sistemas donde sus valores son de  $0.00381 \text{ Kgm}^2$  y  $0.00208 \text{ Kgm}^2$  respectivamente, se manipulan a  $0.381 \text{ Kgm}^2$  y  $20.8 \text{ Kgm}^2$ , disminuyendo la flexibilidad y obteniendo un comportamiento adecuado de elasticidad en articulación y eslabón en las variables de salida ( $\theta_2, \theta_1$  y  $\alpha$ ).
- La linealización del sistema flexible en articulación y eslabón evaluada en diferentes puntos de operación ( $0^0, 90^0, 180^0, 270^0$  y  $360^0$ ) es empleada mediante la técnica de espacio de estados, dando como resultados ante señales de referencia tipo impulso y escalón en lazo abierto que, el punto de  $0^0$  es considerado una respuesta estable, y los puntos  $90^0, 180^0$  y  $270^0$  como respuesta inestable.
- El PID común realizado de manera heurística aplicado al inicio del sistema linealizado para poder controlar el ángulo de posición ( $\theta_1$ ), es fundamental para encontrar posteriormente valores óptimos de control PID fraccionarios, con respecto a sistemas complejos como los son los sistemas flexibles en articulación y eslabón, debido a las oscilaciones presentadas en la dinámica determinada, en cada una de sus variables de salida ( $\theta_2, \theta_1$  y  $\alpha$ ).
- Los parámetros de los controladores PID fraccionarios y de PID común se determinan tomando como prioridad un rango de poca oscilación en la punta del sistema ( $\alpha$ ), se obtiene un valor promedio final en la base del eslabón ( $\theta_1$ ) de  $72.67^0$ , con una diferencia de  $17.32^0$  con respecto a la señal de referencia ( $90^0$ ), mientras que, el PID común con respecto a la señal de referencia ( $90^0$ ) posee una diferencia de ángulo de  $9.42^0$ .

- En el análisis del índice de error, que representa una de las formas para evaluar el rendimiento del control fraccionario, los métodos FPO\_IP\_ITSE y FPO\_SQP\_ISE, considerando a ISE como una de las métricas de rendimiento con sus valores de 1.838 y 1.429 respectivamente teniendo el menor valor de error, son considerados los mejores controles con respecto a la base del sistema flexible ( $\theta_1$ ).
- En el comportamiento de los controles fraccionarios en comparativa con el PID tradicional, se obtiene un tiempo de estabilización promedio de 51.23 segundos, considerando que el PID tradicional se estabiliza con 82.48 segundos, los controles PID de orden fraccionario optimizan el tiempo 30.55 segundos más.
- En el análisis del comportamiento de la punta de sistema flexible como consecuencia de la aplicación del PID fraccionario, se obtiene un valor promedio de  $[0.026512^0, -0.02771^0]$  mayor, a diferencia del PID tradicional, que mantiene un rango de oscilación de  $[0.005981^0, -0.007887^0]$ .
- A medida que se busca una optimización por parte del control PID fraccionario, los rangos de oscilación en la punta comienzan a tener un crecimiento en un rango de  $[0.01881^\circ, -0.02028^\circ]$  a  $[0.03398^\circ, -0.03496^\circ]$  con respecto a los mejores controles seleccionados en un tiempo promedio de 51,23 segundos de estabilización; mientras que teniendo un tiempo de estabilización de 14.13 segundos, la oscilación en la punta varia en un rango de  $[0.5420^\circ, -0.5438^\circ]$  considerado un rango de oscilación alto.

## RECOMENDACIONES

- Considerar este trabajo de titulación como aporte investigativo en el área de sistemas de control y la robótica orientada a sistemas flexibles, de tal manera que sea referenciado en futuras investigaciones, realizando validaciones experimentales en prototipos reales, para corroborar cada uno de sus resultados obtenidos.
- Para futuras investigaciones se recomienda utilizar controladores más robustos, que permitan estabilizar de manera más óptima el sistema de control, reduciendo el tiempo de estabilización, y también como consecuencia reducir la magnitud del rango de oscilación en la punta del sistema flexible, recomendado para sistemas flexibles donde el tiempo de llegar a la señal de referencia sea de suma importancia.
- Considerar el análisis del valor de optimización de la métrica de rendimiento (Performance index), para evaluar de qué forma se optimiza cada una de las métricas (IAE, ISE, ITAE, ITSE) mediante cada uno de los algoritmos de optimización, de tal manera que se pueda deducir cuales son los algoritmos más robustos al momento de trabajar con sistemas complejos como lo son los sistemas flexibles en articulación y eslabón.
- Aplicar PID de orden fraccionario empleando otro tipo de metodologías, de tal manera que se pueda evaluar el rendimiento de la herramienta FOMCON en comparación con otros métodos para emplear un control PID de orden fraccionario, además de conocer otras herramientas que realizan estos controladores.
- Evaluar el sistema linealizándolo con diferentes puntos de operación a los que ya se han estudiado, para conocer qué tipo de comportamientos presenta ante sus cambios de posición, permitiendo una exploración más profunda sobre el sistema unido en articulación y eslabón flexible, evaluando los momentos en los que actúa de manera inestable y en qué puntos la gravedad como fuerza opuesta repercute de manera significativa.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. A. Monje, F. Ramos, B. M. Vinagre, y V. Feliu, «Tip position control of a lightweight flexible manipulator using a fractional order controller», *IET Control Theory Appl.*, vol. 1, n.º 5, Art. n.º 5, sep. 2007, doi: 10.1049/iet-cta:20060477.
- [2] W. J. Book, «Modeling, design, and control of flexible manipulator arms: a tutorial review», en *29th IEEE Conference on Decision and Control*, dic. 1990, pp. 500-506 vol.2. doi: 10.1109/CDC.1990.203648.
- [3] I. Akyuz, E. Yolacan, H. M. Ertunc, y Z. Bingul, *PID and state feedback control of a single-link flexible joint robot manipulator*. 2011, p. 414. doi: 10.1109/ICMECH.2011.5971320.
- [4] V. H. Jaramillo Velásquez, «Nuevas técnicas para el control de robots flexibles con carga variable», <http://purl.org/dc/dcmitype/Text>, Universidad de Castilla-La Mancha, 2016. Accedido: 9 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=83626>
- [5] R. D. Robinett *et al.*, *Flexible Robot Dynamics and Controls*. Boston, MA: Springer US, 2002. doi: 10.1007/978-1-4615-0539-6.
- [6] A. P. Singh, D. Deb, H. Agrawal, y V. E. Balas, «Fractional Modeling and Controller Design of Robotic Manipulators». Springer, 2021.
- [7] R. Vilanova y A. Visioli, *PID control in the third millennium*. Springer, 2012.
- [8] C. A. Saldaña Enderica, J. R. Llata, y C. Torre-Ferrero, «Optimization of Q and R Matrices with Genetic Algorithms to Reduce Oscillations in a Rotary Flexible Link System», *Robotics*, vol. 13, n.º 6, Art. n.º 6, jun. 2024, doi: 10.3390/robotics13060084.
- [9] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Pearson Educación, 2003.
- [10] C. A. Monje, Y. Chen, B. M. Vinagre, D. Xue, y V. Feliu-Battle, *Fractional-order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [11] M. Axtell y M. E. Bise, «Fractional calculus application in control systems», en *IEEE Conference on Aerospace and Electronics*, Dayton, OH, USA: IEEE, 1990, pp. 563-566. doi: 10.1109/NAECON.1990.112826.
- [12] I. Podlubny, «Fractional-order systems and  $PI \lambda D\mu$ -controllers», *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, n.º 1, pp. 208-214, 1999.
- [13] Y. Zhang y L. Jin, *Robot Manipulator Redundancy Resolution*. John Wiley & Sons, 2017.
- [14] A.-M. Zou, Z.-G. Hou, S.-Y. Fu, y M. Tan, «Neural Networks for Mobile Robot Navigation: A Survey», en *Advances in Neural Networks - ISNN 2006*, vol. 3972, J. Wang, Z. Yi, J. M. Zurada, B.-L. Lu, y H. Yin, Eds., en *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3972. , Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2006, pp. 1218-1226. doi: 10.1007/11760023\_177.
- [15] M. Sayahkarajy, Z. Mohamed, y A. A. Mohd Faudzi, «Review of modelling and control of flexible-link manipulators», *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J. Syst. Control Eng.*, vol. 230, n.º 8, pp. 861-873, sep. 2016, doi: 10.1177/0959651816642099.
- [16] K. Alnefaie, H. Diken, y A. Alghamdi, «Residual Vibration of a Rotating Flexible Beam Subject to Prescribed Motion», *J. King Abdulaziz Univ.-Eng. Sci.*, vol. 20, n.º 2, pp. 97-107, 2009, doi: 10.4197/Eng.20-2.5.
- [17] H. Delavari, A. Azizkhani, y P. Shiuooei, «Design and Practical Implementation of a Fractional Order PID Controller for a Single Flexible-Link Robot».
- [18] E. S. Macas Peña y R. A. Sarango Chamba, «Diseño, implementación y análisis de desempeño de un controlador PID de orden fraccionario (FOPID) aplicado a control embebido de sistemas mecatrónicos», bachelorThesis, 2017. Accedido: 8 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://dspace.utpl.edu.ec/jspui/handle/123456789/18021>
- [19] M. Mejerbi, S. Zribi, y J. Knani, «Dynamic modeling of flexible manipulator based on a large number of finite elements», en *2018 International Conference on Advanced Systems*

- and Electric Technologies (IC\_ASET)*, Hammamet: IEEE, mar. 2018, pp. 357-362. doi: 10.1109/ASET.2018.8379882.
- [20] J. J. Padilla Mora, «Diseño e implementación de un controlador no-lineal para un brazo robótico con articulaciones flexibles y enlaces rígidos», *Tecnol. En Marcha*, vol. 33, n.º Extra 6, pp. 160-168, 2020.
- [21] P. Shah y S. Agashe, «Review of fractional PID controller», *Mechatronics*, vol. 38, pp. 29-41, sep. 2016, doi: 10.1016/j.mechatronics.2016.06.005.
- [22] K. Bingi, R. Ibrahim, M. N. Karsiti, S. M. Hassan, y V. R. Harindran, «Scilab Based Toolbox for Fractional-order Systems and PID Controllers», en *Fractional-order Systems and PID Controllers: Using Scilab and Curve Fitting Based Approximation Techniques*, K. Bingi, R. Ibrahim, M. N. Karsiti, S. M. Hassan, y V. R. Harindran, Eds., en *Studies in Systems, Decision and Control.*, Cham: Springer International Publishing, 2020, pp. 137-212. doi: 10.1007/978-3-030-33934-0\_4.
- [23] C. V. Montoya Vaque, «Prototipo de robot submarino autónomo tipo torpedo para recopilación de datos oceanográficos.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península De Santa Elena, 2019., 2019. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/4794>
- [24] A. C. Hidalgo Panchana, «Implementación de un prototipo de un robot móvil tipo hexapodo teledirigido para la contribución de la limpieza aplicado tecnología Open Source.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península de Santa Elena, 2015, 2015. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/2374>
- [25] K. Naranjo Suárez, «Implementación de un prototipo de robot móvil con visión nocturna para vigilancia y seguridad.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península de Santa Elena, 2013., 2013. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/1598>
- [26] N. De La Rosa Mejillón, «Brazo robot, para el reconocimiento y manipulación de objetos, controlado mediante inteligencia artificial, como complemento de tecnología robótica en la carrera de Electrónica y Telecomunicaciones de la Universidad Estatal Península de Santa Elena año 2014.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península de Santa Elena, 2014., 2014. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/1594>
- [27] J. L. González Murillo y J. G. Sánchez Lino, «Diseño e implementación de un sistema automático para el control y monitoreo de una planta prototipo de refrigeración con compresores en paralelo.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península De Santa Elena, 2019., 2019. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/4789>
- [28] P. J. De La A Santamaría y C. G. Saltos Villamar, «Identificación del sistema y diseño del controlador para el proceso de sellado de los botellones en una planta de agua.», bachelorThesis, La Libertad: Universidad Estatal Península de Santa Elena, 2018., 2018. Accedido: 13 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/4625>
- [29] V. F. Batlle, «ROBOTS FLEXIBLES: HACIA UNA GENERACIÓN DE ROBOTS CON NUEVAS PRESTACIONES».
- [30] M. J. YARAD JÁCOME y Ó. W. G. MORALES, «BRAZO ROBÓTICO DIDÁCTICO DE 6 GDL AUTOMATIZADO PARA CLASIFICAR OBJETOS BALÍSTICOS MEDIANTE VISIÓN ARTIFICIAL», *Rev. Cienc. Segur. Def.*, vol. 6, n.º 1, p. 14, sep. 2021, doi: 10.24133/RCS.D.VOL06.N01.2021.04.
- [31] E. Arnáez, *Enfoque práctico del control moderno*. Editorial UPC, 2014. doi: 10.19083/978-612-4191-28-2.
- [32] A. De Luca y W. J. Book, «Robots with Flexible Elements», en *Springer Handbook of*

- Robotics*, B. Siciliano y O. Khatib, Eds., Cham: Springer International Publishing, 2016, pp. 243-282. doi: 10.1007/978-3-319-32552-1\_11.
- [33] C. A. Jáuregui Salinas, «Evaluación de estrategias de sintonización de controladores fraccionarios para planta no lineal: sistema de estanques», 2016, Accedido: 5 de junio de 2024. [En línea]. Disponible en: <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/140963>
- [34] A. M. L. Garces y E. F. M. Ortega, «SIMULACIÓN DE UN CONTROL FRACCIONAL APLICADO A UNA PLATINA MOTORIZADA (UNIDAD DE CD) PARA EL CONTROL DE POSICIÓN», 2012.
- [35] J. B. Viola Villamizar y others, «Control fraccionario aplicado al diseño de controladores», 2013.
- [36] F. Zayas Gato, H. Quintián Pardo, E. Jove Pérez, J. L. Casteleiro Roca, y J. L. Calvo Rolle, *Diseño de controladores PID*, 1.<sup>a</sup> ed. Universidade da Coruña. Servizo de Publicacións, 2020. doi: 10.17979/spudc.9788497497855.
- [37] «(16) (PDF) Fractional Order PID Controller Design for DC Motor Speed Control System via Flower Pollination Algorithm». Accedido: 15 de diciembre de 2024. [En línea]. Disponible en: [https://www.researchgate.net/publication/332528392\\_Fractional\\_Order\\_PID\\_Controller\\_Design\\_for\\_DC\\_Motor\\_Speed\\_Control\\_System\\_via\\_Flower\\_Pollination\\_Algorithm](https://www.researchgate.net/publication/332528392_Fractional_Order_PID_Controller_Design_for_DC_Motor_Speed_Control_System_via_Flower_Pollination_Algorithm)
- [38] I. Podlubny, L. Dorcak, y I. Kostial, «On fractional derivatives, fractional-order dynamic systems and PI/sup /spl lambda//D/sup /spl mu//-controllers», en *Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control*, dic. 1997, pp. 4985-4990 vol.5. doi: 10.1109/CDC.1997.649841.
- [39] I. Podlubny, «Fractional-order systems and PI/sup /spl lambda//D/sup /spl mu//-controllers», *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 44, n.º 1, pp. 208-214, ene. 1999, doi: 10.1109/9.739144.
- [40] M. Tajjudin, S. N. H. Johari, S. A. Aziz, y R. Adnan, «Minimum ISE Fractional-order PID (FOPID) Controller for Ball and Beam Mechanism», en *2019 IEEE 10th Control and System Graduate Research Colloquium (ICSGRC)*, ago. 2019, pp. 152-155. doi: 10.1109/ICSGRC.2019.8837071.
- [41] A. Tepljakov, E. Petlenkov, y J. Belikov, *A Flexible MATLAB Tool for Optimal Fractional-order PID Controller Design Subject to Specifications*. 2012, p. 4703.
- [42] A. Oustaloup, F. Levron, B. Mathieu, y F. M. Nanot, «Frequency-band complex noninteger differentiator: characterization and synthesis», *IEEE Trans. Circuits Syst. Fundam. Theory Appl.*, vol. 47, n.º 1, pp. 25-39, ene. 2000, doi: 10.1109/81.817385.
- [43] J. Baranowski, W. Bauer, M. Zagórowska, T. Dziwiński, y P. Piątek, *Time-domain Oustaloup approximation*. 2015. doi: 10.1109/MMAR.2015.7283857.
- [44] L. A. Córdova Vivanco, «Evaluación y análisis comparativo de las estrategias de sintonización, optimización y aproximación de controladores de orden fraccionario aplicados a sistemas mecatrónicos.», ene. 2020, Accedido: 9 de febrero de 2023. [En línea]. Disponible en: <http://dspace.espace.edu.ec/handle/123456789/13851>
- [45] A. Basu y S. Mohanty, *FOPID Controller for Heating Furnaces*. 2016. doi: 10.13140/RG.2.1.1887.1921.
- [46] A. Basu, S. Mohanty, y R. Sharma, «Designing of the PID and FOPID controllers using conventional tuning techniques», en *2016 International Conference on Inventive Computation Technologies (ICICT)*, ago. 2016, pp. 1-6. doi: 10.1109/INVENTIVE.2016.7824789.
- [47] J. A. Nelder y R. Mead, «A Simplex Method for Function Minimization», *Comput. J.*, vol. 7, n.º 4, pp. 308-313, ene. 1965, doi: 10.1093/comjnl/7.4.308.
- [48] S. K. Verma, S. Yadav, y S. K. Nagar, «Optimized fractional order PID controller for non-minimum phase system with time delay», en *2016 International Conference on Emerging Trends in Electrical Electronics & Sustainable Energy Systems (ICETEESSES)*, IEEE,

2016, pp. 169-173.

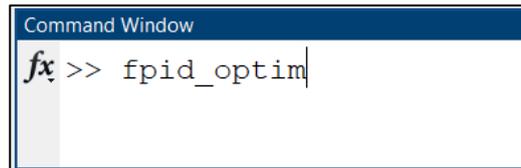
- [49] A. Basu, S. Mohanty, y R. Sharma, «Tuning of FOPID Controller for Meliorating the Performance of the Heating Furnace Using Conventional Tuning and Optimization Technique».
- [50] E. S. Macas Peña, «Diseño, implementación y análisis de desempeño de un controlador PID de orden fraccionario (FOPID) aplicado a control embebido de sistemas mecatrónicos.», Thesis, Universidad Técnica Particular de Loja, 2017. [En línea]. Disponible en: <https://dspace.utpl.edu.ec/bitstream/123456789/18021/1/MACAS%20PE%C3%91A-%20%20SARANGO%20CHAMBA.pdf>
- [51] A. A. Rubio y G. V. Raffo, «MANUAL DE SIMULINK PARA LA ASIGNATURA DE TEORÍA DE SISTEMAS».
- [52] A. Tepljakov, E. Petlenkov, y J. Belikov, «FOMCON: a MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control», *Int. J. Microelectron. Comput. Sci.*, vol. 2, pp. 51-62, ene. 2011.
- [53] B. P. M. Silva, B. A. Santana, T. L. M. Santos, y M. A. F. Martins, «An implementable stabilizing model predictive controller applied to a rotary flexible link: An experimental case study», *Control Eng. Pract.*, vol. 99, p. 104396, jun. 2020, doi: 10.1016/j.conengprac.2020.104396.
- [54] «Nonlinear Control of a Flexible Joint Robotic Manipulator with Experimental Validation», *Stroj. Vestn. - J. Mech. Eng.*, vol. 64, n.º 1, ene. 2018, doi: 10.5545/sv-jme.2017.4786.
- [55] Y.-C. Chang y H.-M. Yen, «Robust tracking control for a class of electrically driven flexible-joint robots without velocity measurements», *Int. J. Control*, vol. 85, n.º 2, pp. 194-212, feb. 2012, doi: 10.1080/00207179.2011.643241.
- [56] I. H. Akyuz, «MODELING AND CONTROL OF A RIGID-LINK FLEXIBLE JOINT ROBOT MANIPULATOR», Accedido: 21 de julio de 2024. [En línea]. Disponible en: [https://www.academia.edu/4251905/MODELING\\_AND\\_CONTROL\\_OF\\_A\\_RIGID\\_LINK\\_FLEXIBLE\\_JOINT\\_ROBOT\\_MANIPULATOR](https://www.academia.edu/4251905/MODELING_AND_CONTROL_OF_A_RIGID_LINK_FLEXIBLE_JOINT_ROBOT_MANIPULATOR)

## ANEXOS

### Anexo 1. Diseño del controlador PID fraccionario para el sistema flexible.

1. En el “Command Windows” de MATLAB© se ingresa el comando “fpid\_optim” para abrir la herramienta “FPID Optimization Tool”.

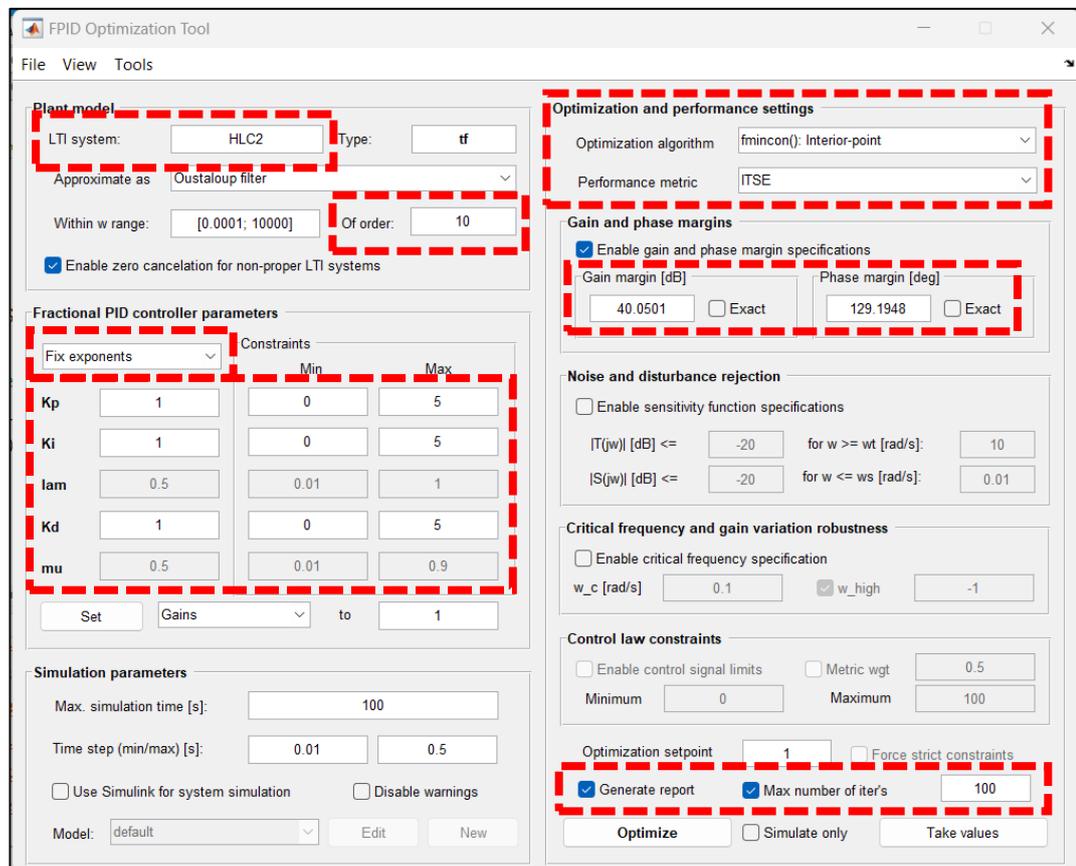
### Anexo 2. Comando para abrir el optimizador PID fraccionario.



```
fx >> fpid_optim
```

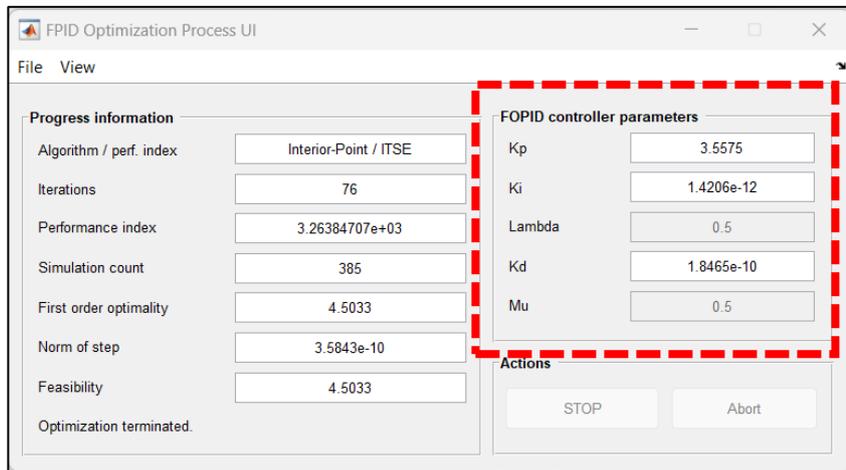
2. Se ajusta los valores correspondientes del orden del filtro, se sintoniza primero el cálculo de las variables del control PID, se ajusta el tipo de algoritmo de optimización, margen de fase y ganancia, se ajusta para generar un reporte y por último se regula el número de iteraciones que se considere necesario para poder realizar el cálculo computacional.

### Anexo 3. Configuraciones para sintonizar las componentes principales ( $K_P$ , $K_i$ y $K_d$ ).



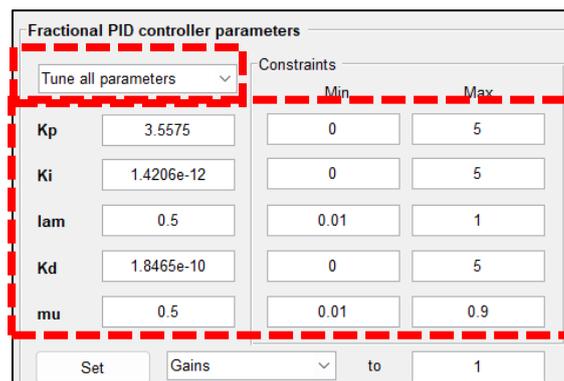
- Finalizado el proceso de cálculo computacional, se determina las primeras componentes del controlador fraccionario ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ).

**Anexo 4.** Parámetros ( $K_p$ ,  $K_i$  y  $K_d$ ) determinados por la herramienta “Fpid Optimization tool”.



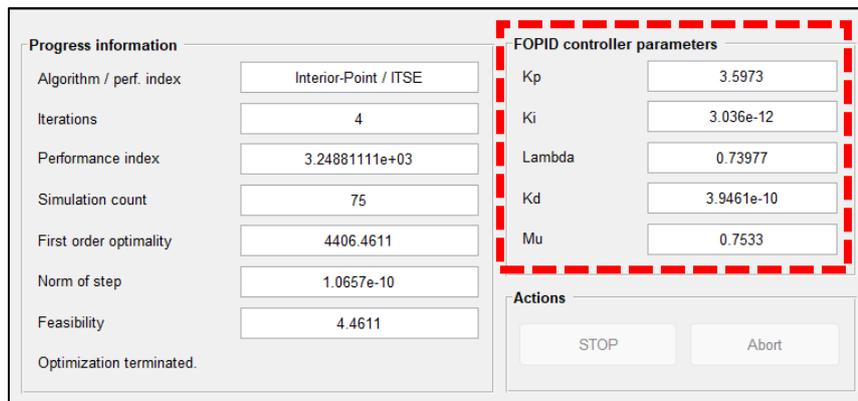
- Se regresa al optimizador y se selecciona la opción para realizar el cálculo computacional de todos los componentes del controlador PID de orden fraccionario.

**Anexo 5.** Configuración para el cálculo de los componentes fraccionarios del control PID fraccionario ( $\lambda$  y  $\mu$ ).



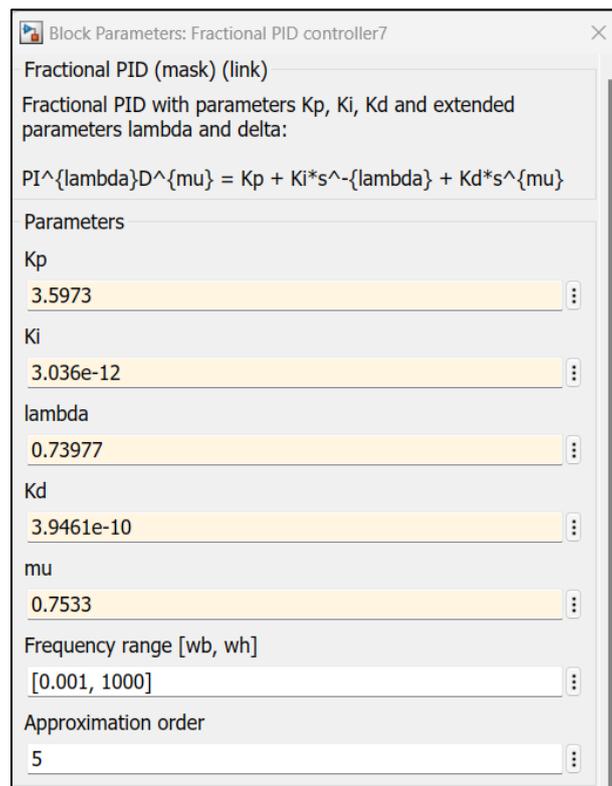
- Terminado el proceso de cálculo se obtiene los cinco componentes del controlador PID de orden fraccionario ( $K_p$ ,  $K_i$ ,  $K_d$ ,  $\lambda$  y  $\mu$ ).

**Anexo 6.** Cálculos finales de los componentes del control PID fraccionario ( $K_p, K_i, K_d, \lambda$  y  $\mu$ ).



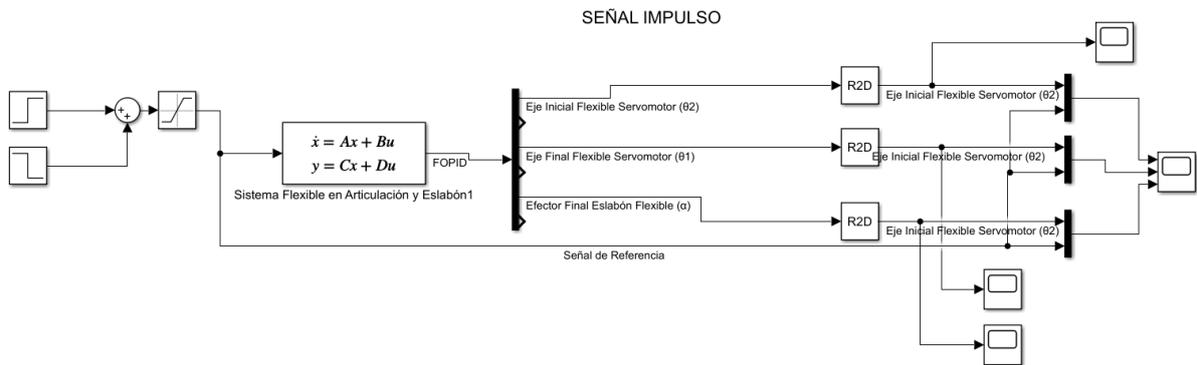
6. Se ingresa las componentes de control en el diagrama de bloques de Simulink, para evaluar el comportamiento del controlador.

**Anexo 7.** Ingreso de los componentes fraccionarios al diagrama de bloques.

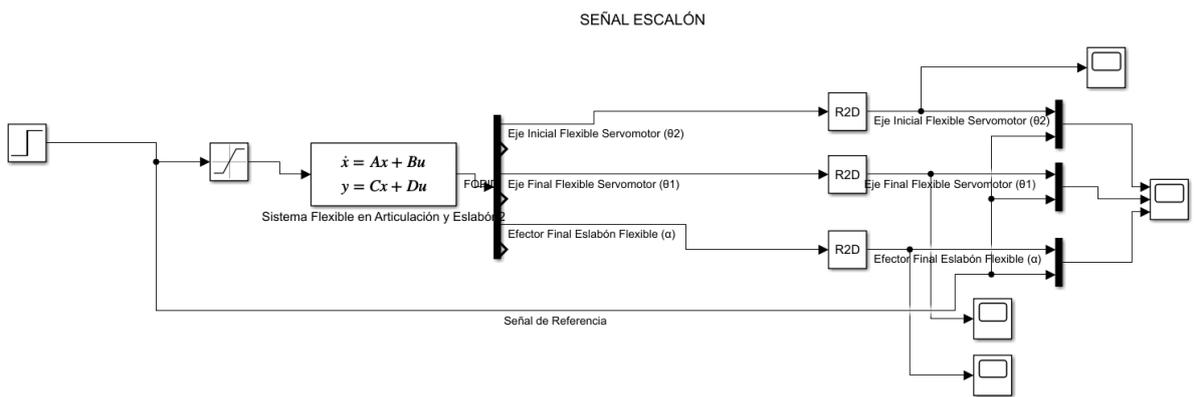


7. Quedando el controlador ajustado para el sistema linealizado y poder evaluar su rendimiento.

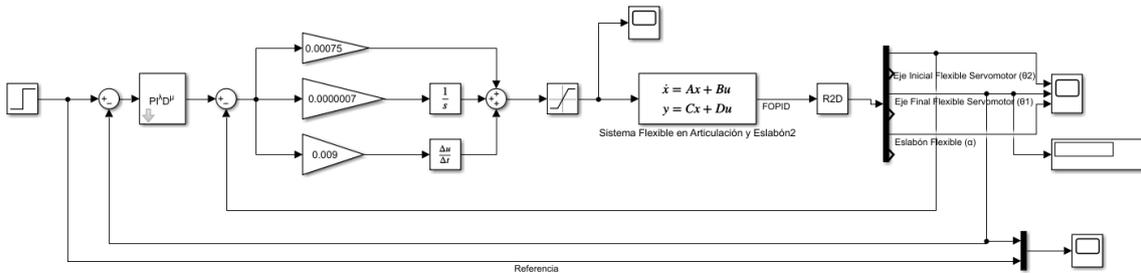
### Anexo 8. Análisis de respuesta con señal tipo impulso.



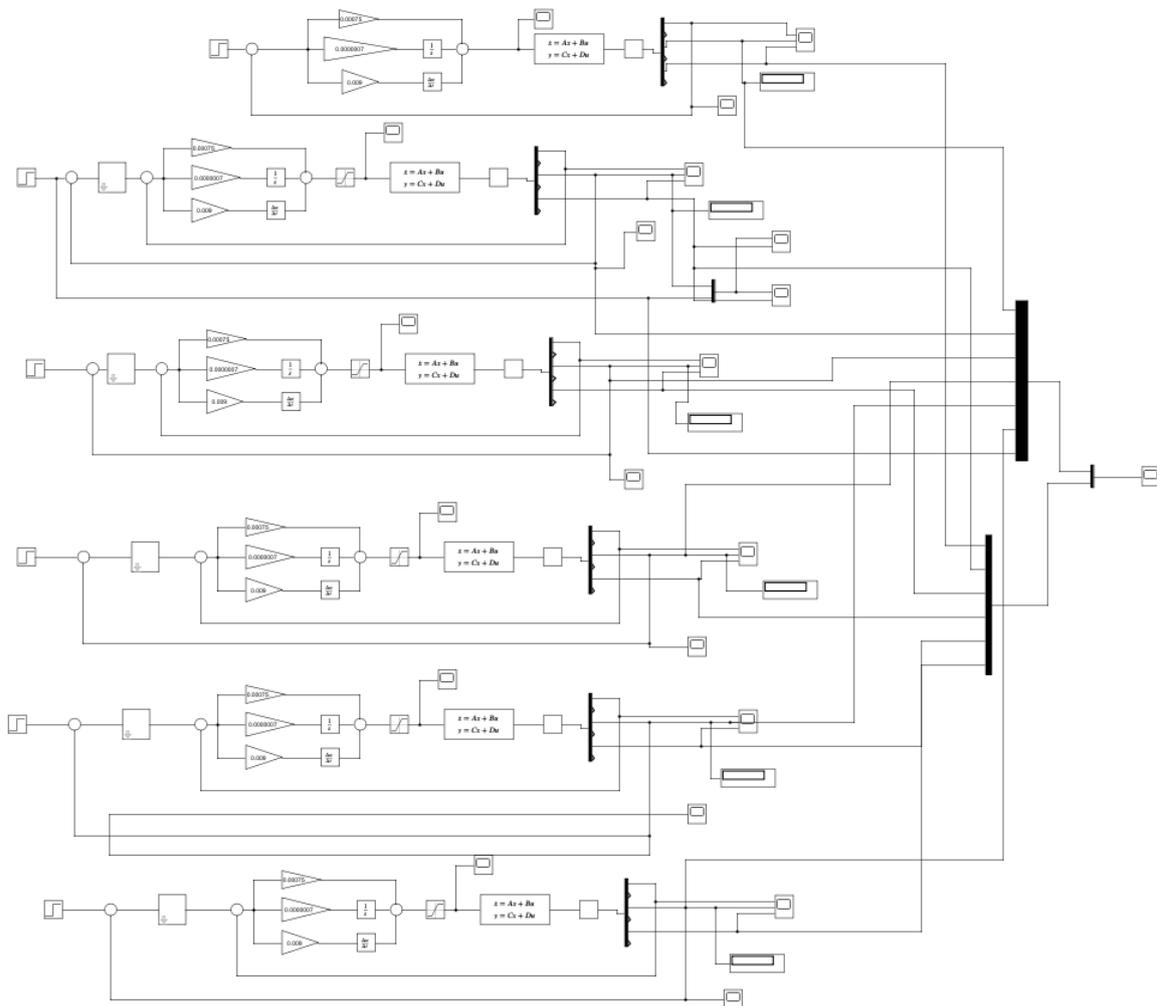
### Anexo 9. Análisis de respuesta con señal escalón.



### Anexo 10. Adaptación final del bloque PID fraccionario al sistema flexible.



**Anexo 11.** Análisis de comparativa de los mejores controles seleccionados PID fraccionarios con un PID común.



# PANCHANA\_PARRA\_LUIS\_ALBERTO\_TESIS\_EYT

**< 1%**  
Textos sospechosos

**< 1%** Similitudes  
< 1% similitudes entre comillas  
< 1% entre las fuentes mencionadas

**0%** Idiomas no reconocidos

Nombre del documento: PANCHANA\_PARRA\_LUIS\_ALBERTO\_TESIS\_EYT.pdf  
ID del documento: 76facc102fd6560f2910a56475d5144c00dd6134  
Tamaño del documento original: 4,05 MB  
Autores: []

Depositante: CARLOS ALBERTO SALDAÑA ENDERICA  
Fecha de depósito: 14/10/2024  
Tipo de carga: interface  
fecha de fin de análisis: 14/10/2024

Número de palabras: 27.899  
Número de caracteres: 194.540

Ubicación de las similitudes en el documento:



## Fuentes con similitudes fortuitas

N°	Descripciones	Similitudes	Ubicaciones	Datos adicionales
1	<a href="https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/1594">repositorio.upse.edu.ec</a>   Repositorio Universidad Estatal Península de Santa Elena: ... https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/1594	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (22 palabras)
2	<a href="http://dspace.esPOCH.edu.ec/bitstream/123456789/13851/1/20T01305.pdf">dspace.esPOCH.edu.ec</a> http://dspace.esPOCH.edu.ec/bitstream/123456789/13851/1/20T01305.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (23 palabras)
3	<a href="https://repositorio.upse.edu.ec/bitstream/46000/4794/1/UPSE-TET-2019-0008.pdf">repositorio.upse.edu.ec</a> https://repositorio.upse.edu.ec/bitstream/46000/4794/1/UPSE-TET-2019-0008.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (21 palabras)
4	<a href="http://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/13851">dspace.esPOCH.edu.ec</a>   DSpace ESPOCH.: Evaluación y análisis comparativo de las e... http://dspace.esPOCH.edu.ec/handle/123456789/13851	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (16 palabras)
5	<a href="https://repositorio.upse.edu.ec/bitstream/46000/11204/1/UPSE-TET-2024-0005.pdf">repositorio.upse.edu.ec</a> https://repositorio.upse.edu.ec/bitstream/46000/11204/1/UPSE-TET-2024-0005.pdf	< 1%		Palabras idénticas: < 1% (13 palabras)

## Fuentes mencionadas (sin similitudes detectadas)

Estas fuentes han sido citadas en el documento sin encontrar similitudes.

- <http://dspace.utpl.edu.ec/jspui/handle/123456789/18021>
- <https://repositorio.upse.edu.ec/handle/46000/4794>
- <http://purl.org/dc/dcmitype/Text>
- <https://dialnet.unirioja.es/servlet/tesis?codigo=83626>
- <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/140963>