



**UNIVERSIDAD PENÍNSULA DE
SANTA ELENA**

FACSISTEL

INGENIERÍA EN ELECTRÓNICA Y
AUTOMATIZACIÓN

TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR

**DISEÑO DE UN CONTROL
ADAPTATIVO PARA UN
SISTEMA ROTATORIO
EXPERIMENTAL DE UN
ESLABÓN FLEXIBLE**

Carlos Alberto Quijije Tomalá

Dirigido por:
Ing. Carlos Alberto Saldaña Enderica, M.Sc.

La Libertad - 2025

DEDICATORIA

Este trabajo se lo dedico, en primer lugar, a Dios, por brindarme la fortaleza, la sabiduría y la perseverancia necesarias para alcanzar este importante logro.

A mis padres, por ser el soporte de mi formación personal y académica. Su apoyo incondicional, sus lecciones y su amor me han ayudado a superar cualquier obstáculo en el camino.

A mi pareja, por su comprensión, paciencia y apoyo incondicional en todo el proceso. Su aliento me ha sostenido en los momentos más difíciles.

Y, muy especialmente, a mi hijo, fuente de inspiración y motivación. Su felicidad y amor me motivan a dar lo mejor de mí y a seguir luchando por mis sueños.

Este logro no solo es un esfuerzo propio, sino que también refleja el respaldo, la confianza y el amor que he recibido de todos ellos.

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente a Dios por concederme la fortaleza, sabiduría y perseverancia necesarias para culminar con éxito esta etapa de mi formación profesional.

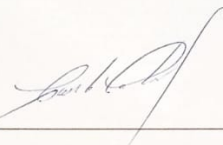
De igual manera, expreso mi sincero agradecimiento a mis docentes por compartir sus conocimientos, dedicación y orientación a lo largo de mi carrera. Su guía ha sido esencial para mi crecimiento académico y personal.

También agradezco a mis compañeros de estudio, por su colaboración, apoyo y amistad, los cuales hicieron de este proceso una experiencia enriquecedora y motivadora.

Finalmente, reconozco el esfuerzo de todas las personas que, de una u otra forma, contribuyeron al desarrollo de este trabajo y al cumplimiento de esta meta.

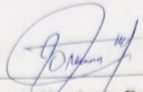
APROBACIÓN DEL TUTOR

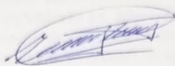
En mi calidad de tutor del trabajo de titulación denominado: “**Diseño de un control adaptativo para un sistema rotatorio experimental de un eslabón flexible**”, presentado por el estudiante **Carlos Alberto Quijije Tomalá**, de la carrera de **Ingeniería en Electrónica y Automatización** de la Universidad Estatal Península de Santa Elena, me permito declarar que luego de haber orientado, estudiado y revisado, lo apruebo en todas sus partes y autorizo al estudiante para que inicie los trámites legales correspondientes.

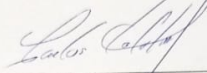



Ing. Carlos Alberto Saldaña Enderica, M.Sc.
Tutor


TRIBUNAL DE GRADO


* Ing. Ronald Humberto Rovira Jurado, Ph.D.
DIRECTOR DE CARRERA


Ing. Edison Stalin Coral Salinas, Mgtr.
DOCENTE ESPECIALISTA


Ing. Carlos Alberto Saldña Enderica, M.Sc.
TUTOR


Ing. Luis Enrique Chuquimarca Jiménez, Mgtr.
DOCENTE GUÍA UIC


Ing. Corina Gonzabay De La A. Mgtr.
SECRETARIA DEL TRIBUNAL

Resumen

Este trabajo de titulación presenta el diseño y simulación de un sistema de control adaptativo aplicado a un sistema rotatorio experimental de un eslabón. El desarrollo se realizó íntegramente en entorno MATLAB/Simulink, modelando la planta con un solo grado de libertad.

Se puso en marcha un modelo de control adaptativo, basado en un modelo matemático formulado en el espacio de estados. Con base en esto, se desarrolló un controlador que puede crear la señal de control y modificar sus parámetros a lo largo de la simulación.

Se examinaron variables como la respuesta angular de la base y la deflexión del eslabón flexible, en las pruebas realizadas se incluyó el tipo de señal tipo escalón como referencia. Hubo una disminución significativa en las oscilaciones del sistema, así como una reducción en el sobrepaso y, principalmente, un progreso evidente en el seguimiento.

Para concluir, se demostró que el desempeño general del sistema se elevó al incluir el término de robustez, lo cual permitió corroborar la eficacia del control adaptativo por modelo de referencia directo que se implementó en condiciones simuladas.

Palabras clave: Simulación, MATLAB, Simulink, robustez, eslabón flexible, sistema rotatorio, modelo de referencia.

Abstract

This thesis presents the design and simulation of an adaptive control system applied to an experimental single-link rotary system. The development was carried out entirely in a MATLAB/Simulink environment, modeling the plant with a single degree of freedom.

An adaptive control model was implemented, based on a mathematical model formulated in state space. Based on this, a controller was developed that can generate the control signal and modify its parameters throughout the simulation.

Variables such as the angular response of the base and the deflection of the flexible link were examined. The tests included a step input signal as a reference. A significant decrease in system oscillations was observed, as well as a reduction in overshoot and, most importantly, a clear improvement in tracking.

In conclusion, it was demonstrated that the overall system performance improved with the inclusion of the robustness term, thus confirming the effectiveness of the direct reference model adaptive control implemented under simulated conditions.

Keywords: Simulation, MATLAB, Simulink, robustness, flexible link, rotating system, reference model.

Índice

Índice de figuras	9
Índice de cuadros	10
1. Introducción	11
1.1. Justificación	11
1.2. Panorama actual	12
1.3. Objetivos	14
1.3.1. Objetivo General	14
1.3.2. Objetivos Específicos	14
1.4. Fundamentos teóricos	15
1.4.1. Eslabón flexible	15
1.4.2. Modelado matemático	15
1.4.3. Teoría de Euler-Bernoulli	16
1.4.4. Principio de Hamilton	17
1.4.5. Modelo de espacio de estados	18
1.4.6. Energía cinética del sistema	21
1.4.7. Energía potencial del sistema	23
1.4.8. Modelo mecánico-eléctrico del motor DC	23
1.4.9. Control adaptativo por modelo de referencia	27
1.4.10. Modelo de referencia	27
1.4.11. Modelo de perturbación e incertidumbre	29
1.4.12. Control adaptativo por modelo de referencia indirecto	30
1.4.13. Control adaptativo por modelo de referencia directo	30
1.4.14. Actualizaciones de parámetros	31
1.4.15. Modificación del aprendizaje en la actualización de parámetros	32
1.4.16. Cálculo de las ganancias adaptativas	33
1.5. Marco contextual	34
2. Métodos y diseño experimental	35
2.1. Métodos	35
2.1.1. Investigación documental	35
2.1.2. Modelado y simulación	35
2.1.3. Diseño e Implementación del Control Adaptativo	35
2.1.4. Evaluación y Análisis de Desempeño	36
2.2. Descripción del proyecto	36
2.3. Componentes lógicos	38
2.3.1. Software MATLAB	39

2.3.2. Simulink	40
2.4. Diseño del controlador en MATLAB–SIMULINK®	40
2.4.1. Modelado y análisis de la planta en lazo abierto	41
2.5. Modelo de referencia directo en lazo cerrado	42
2.5.1. Implementación en simulink	44
3. Resultados	47
3.1. Requerimientos del sistema de control	47
3.2. Restricciones del sistema de control	48
3.3. Sistema en lazo abierto	48
3.4. MRAC con actualización de parámetros	50
3.4.1. Respuesta ante una señal tipo escalón	50
3.4.2. Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple	52
3.5. MRAC con actualización de parámetros con el elemento sigma σ	54
3.5.1. Respuesta ante una señal tipo escalón con sigma σ	54
3.5.2. Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple con sig- ma σ	56
3.5.3. Tablas comparativas de las salidas de Theta y Alpha	58
3.6. Estabilidad del controlador sin sigma - con sigma	60
4. Conclusiones y recomendaciones	65
4.1. Conclusiones	65
4.2. Recomendaciones	66
Referencias	67
Anexos	77
A. Código en MATLAB del Control Adaptativo Directo	77
B. Cálculo de control.	79
C. Cálculo de las ganancias adaptativas en SIMULINK.	80

Índice de figuras

1.	Diagrama de bloques control adaptativo indirecto [59]	30
2.	Diagrama de bloque control adaptativo directo [60]	31
3.	Descripción del proyecto	38
4.	Implementación del controlador adaptativo en el entorno de Simulink	45
5.	Señal de voltaje	49
6.	Salida de theta	49
7.	Salida de alfa	50
8.	Respuesta de la base ante una señal tipo escalón	51
9.	Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón	52
10.	Respuesta de la base ante una señal tipo escalón múltiple	53
11.	Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón múltiple	54
12.	Respuesta de la base ante una señal tipo escalón	55
13.	Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón	56
14.	Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple con sigma	57
15.	Enlace flexible ante una señal tipo escalón múltiple con sigma	58
16.	Respuesta de theta ante una perturbación	61
17.	Respuesta de alfa ante una perturbación	62
18.	Respuesta de theta ante una perturbación con sigma	63
19.	Respuesta de alfa ante una perturbación con sigma	64
20.	Reporte de compilation.	81

Índice de cuadros

1.	Parámetros físicos del sistema rotatorio con eslabón flexible . .	41
2.	Parámetros para el cálculo del modelo de referencia	43
3.	Parámetros de ganancias adaptativas	43
4.	Cuadro comparativo de valores con sigma y sin sigma	59
5.	Valores para la señal tipo escalón múltiple sin sigma.	59
6.	Valores para la señal tipo escalón múltiple con sigma.	59
7.	Cuadro comparativo de perturbación con sigma y sin sigma . .	64

1. Introducción

Los sistemas rotatorios con elementos flexibles han adquirido una notable importancia en la robótica, la automatización y la biomecánica, debido a su capacidad para replicar movimientos precisos con estructuras ligeras y versátiles. La presencia de eslabones o articulaciones con cierto grado de flexibilidad estructural introduce efectos dinámicos complejos que no pueden ser ignorados en el diseño de sistemas de control [1]. Esta flexibilidad estructural se traduce en fenómenos como vibraciones mecánicas, deformaciones estáticas o modos de oscilación que alteran significativamente el comportamiento del sistema.

El propósito general de este proyecto es desarrollar un sistema de control adaptativo por modelo de referencia directo (MRAC), aplicado a un mecanismo rotatorio con un eslabón flexible. El estudio se llevará a cabo en un entorno de simulación, utilizando parámetros físicos previamente definidos. Se emplearán herramientas como MATLAB–SIMULINK[®] para construir un modelo matemático preciso del sistema, y con ello implementar una estrategia de control capaz de reducir oscilaciones y mantener una respuesta estable y eficiente ante cambios en la señal de entrada, variaciones en la masa del sistema o comportamientos dinámicos no lineales.

En fases posteriores, se evaluará el rendimiento del controlador adaptativo por modelo de referencia directo (MRAC) en condiciones simuladas que abarcan alteraciones en las propiedades físicas, cambios en la referencia o perturbaciones. Se evidenciará que esta táctica de control optimiza la estabilidad, la exactitud y el rendimiento del sistema rotatorio con eslabón flexible, aun cuando se presenten alteraciones imprevistas en la entrada, lo que demuestra su habilidad para adaptarse.

1.1. Justificación

Los sistemas rotatorios con eslabones flexibles presentan desafíos en el diseño e implementación para las estrategias de control, debido a los efectos que produce su comportamiento elástico. Entre estos efectos destacan las oscilaciones mecánicas no deseadas, las deflexiones estáticas y la pérdida de precisión durante el seguimiento de trayectorias, situaciones que se acentúan cuando las condiciones del sistema varían en el tiempo [2].

En este tipo de sistemas, las aproximaciones clásicas basadas en modelos rígidos o parámetros fijos resultan insuficientes, ya que su efectividad se ve limitada cuando la dinámica real no coincide con las condiciones del diseño. La incapacidad de los métodos de control convencionales para adaptarse a cambios en la dinámica del sistema dificulta mantener el desempeño desea-

do, lo que hace necesario recurrir a estrategias de control que ajusten sus parámetros de manera autónoma conforme evoluciona el sistema [3].

Frente a esta problemática, el control adaptativo por modelo de referencia directo, se presenta como una solución efectiva, al permitir modificar en tiempo real sus parámetros internos, de forma que la respuesta del sistema siga la dinámica de un modelo de referencia previamente definido. A diferencia de los controladores convencionales, el (MRAC) no depende de un modelo exacto de la planta, y es capaz de mantener el rendimiento incluso ante cambios en la masa, rigidez o en la señal de entrada, esta capacidad de adaptación es clave para enfrentar condiciones no lineales propias de los sistemas con eslabones flexibles [4].

Además de resolver la problemática técnica planteada, este trabajo aporta un enfoque adaptable y escalable que puede aplicarse a otros sistemas rotatorios con características similares. Investigaciones recientes han demostrado que técnicas como el control activo de vibraciones, combinadas con modelos adaptativos, mejoran de forma significativa la respuesta dinámica, especialmente en zonas críticas de operación o ante resonancias estructurales [5].

Así mismo, se ha evidenciado la necesidad de estrategias inteligentes en configuraciones con un solo grado de libertad, donde los efectos de la flexibilidad no pueden ignorarse [6]. Con la metodología propuesta, no solo se aborda el control de un sistema con eslabón flexible, sino que se sientan bases sólidas para futuras implementaciones en entornos industriales y de investigación que requieran alta estabilidad y precisión.

La experiencia adquirida y los resultados obtenidos servirán como referencia para investigaciones posteriores y para la implementación de estrategias de control adaptativo por modelo de referencia directo en aplicaciones reales de la ingeniería.

1.2. Panorama actual

El control adaptativo tiene sus bases en aportes que van desde los fundamentos matemáticos hasta su aplicación en sistemas complejos. Augustin-Louis Cauchy estableció principios esenciales para el análisis matemático y el estudio de materiales elásticos, fundamentales en la ingeniería de control [7]. George Biddell Airy desarrolló uno de los primeros métodos de regulación automática para mecanismos rotatorios [8], seguido por James Clerk Maxwell e Ivan Alekseevich Vischnegradsky, quienes definieron criterios de estabilidad y expusieron las limitaciones de reguladores proporcionales [9]. Bernard Widrow Whitaker y Richard Osburn introdujeron el control adaptativo por modelo de referencia directo (MRAC) [10], que se consolidó con

avances como el espacio de estados y las leyes de adaptación de Lyapunov [11].

Entre otras aportaciones fundamentales se encuentran el modelado de sistemas rotatorios flexibles utilizando la teoría de Euler-Bernoulli, que realizaron David Cannon y Erwin Schmitz [12]; el desarrollo del control adaptativo robusto, llevado a cabo por Petros Ioannou y Jing Sun [13]; y los progresos en identificabilidad de modelos no lineales, realizados por Lennart Ljung y Torkel Glad [14]. El empleo de aprendizaje por refuerzo y redes neuronales en control adaptativo fue promovido por investigadores como Kannan Parthasarathy, Toshio Fukuda, Tetsuya Shibata y Kumpati Narendra [15, 16, 17].

A partir de las investigaciones realizadas, en el año 2019 se implementaron arquitecturas del control adaptativo por modelo de referencia (MRAC) para evaluar su capacidad de seguimiento bajo condiciones reales de incertidumbre y perturbaciones. Los resultados obtenidos demostraron que el controlador adaptativo por modelo de referencia podía ajustarse en tiempo real a variaciones no modeladas, como cambios en las propiedades del sistema o degradación de actuadores, manteniendo la trayectoria deseada. Este tipo de validación experimental, incrementó la confianza en la aplicación directa del MRAC a sistemas físicos con restricciones, incluyendo sistemas rotatorios con elementos flexibles [18].

Una de las mejoras recientes al MRAC clásico ha sido la incorporación de versiones discretas junto con mecanismos de command governor para moderar las señales de mando ante cambios bruscos. Esta estrategia, validada experimentalmente en 2020, suaviza la respuesta transitoria sin comprometer la estabilidad garantizada por Lyapunov, evitando que una adaptación rápida excite modos flexibles no deseados, esta técnica permite un asentamiento más rápido y controlado, reduciendo las oscilaciones durante la fase de adaptación [19].

En 2021, se obtuvieron resultados significativos en la integración de controladores MRAC directos con lazos PID en el sector industrial, especialmente en sistemas CNC de alta precisión. Esta combinación utiliza la solidez adaptativa del MRAC para gestionar alteraciones e incertidumbres, mientras que el PID conserva un control preciso en estado estacionario. Los resultados han demostrado disminuciones notables en el error de posicionamiento y una eliminación eficaz de vibraciones, lo cual valida la factibilidad de estas soluciones híbridas tanto en sistemas rotatorios con flexibilidad estructural como en entornos industriales rigurosos[20].

En 2022, un estudio implementó un controlador adaptativo difuso con modo deslizante en una plataforma Quanser de junta rotatoria flexible, logrando una supresión efectiva de vibraciones y un seguimiento preciso del ángulo objetivo. El enfoque híbrido utilizó lógica difusa para manejar in-

certidumbres y variaciones no lineales, mientras que el término deslizante aportó robustez frente a perturbaciones rápidas. La validación experimental mostró que, incluso ante cambios en la rigidez de la junta o torques externos inesperados, el sistema mantuvo la estabilidad y el desempeño deseado [21].

Para los sistemas rotatorios con eslabón flexible, se desarrollaron controladores de alto desempeño combinando referencias polinomiales, acciones feedforward y feedback de alta fidelidad, propuesto en el año 2024 con el objetivo de mover la punta de forma rápida sin excitar resonancias, implementado estrategias robustas híbridas capaces de manejar no linealidades e incertidumbre, demostrando la eficiencia para mitigar las vibraciones y tener un seguimiento preciso [22].

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Optimizar el rendimiento y la estabilidad de un sistema rotatorio simulado de un eslabón flexible aplicado a un sistema de control adaptativo eficiente, mejorando su precisión y capacidad de adaptación a diferentes condiciones operativas.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Modelar matemáticamente el sistema rotatorio experimental con flexibilidad en el eslabón para lograr que el sistema sea estable.
- Realizar el modelado matemático del sistema rotatorio con eslabón flexible, con el fin de evaluar el control adaptativo sobre el modelo identificado de la marca quanser, para mejorar las perturbaciones y tener mejoras en la estabilidad del sistema en diversas condiciones operativas.
- Simular el sistema rotatorio experimental de un eje de libertad, con el propósito de desarrollar soluciones accesibles que permitan comprender los principios fundamentales de sistemas rotatorios.
- Simular el modelo identificado y el control adaptativo utilizando la herramienta de MATLAB–SIMULINK®.

1.4. Fundamentos teóricos

1.4.1. Eslabón flexible

El eslabón flexible es un componente fundamental que permite la transferencia de movimiento y fuerzas entre distintas partes de un sistema. A diferencia de los eslabones rígidos, está fabricado con materiales elásticos, lo que le otorga la capacidad de doblarse y estirarse bajo carga. Esta característica le brinda un mayor grado de libertad, haciéndolo adecuado para aplicaciones donde se requiere un movimiento más suave y controlado [23].

La teoría de la elasticidad y la dinámica de los sistemas flexibles son las bases del modelado matemático. Se obtienen las ecuaciones de movimiento a partir de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y las leyes de Hamilton, tomando en cuenta las fuerzas internas y externas que inciden en el sistema. El análisis de las vibraciones que impactan el eslabón es un elemento crucial en este modelado, dado que pueden tener un impacto importante en su estabilidad y su comportamiento dinámico [24].

1.4.2. Modelado matemático

El modelado matemático es la representación de un sistema real mediante estructuras matemáticas, representadas con ecuaciones y algoritmos, con el fin de explicar su comportamiento, predecir su evolución y apoyar a la toma de decisiones. Este proceso siempre implica formular supuestos, seleccionar variables relevantes y validar contra datos antes de adoptar el modelo como herramienta útil [25].

La práctica moderna sigue un ciclo iterativo, primero es plantear el problema y objetivos, segundo formular las relaciones y restricciones, tercero analizar o resolver el modelo, cuarto contrastar con datos y refinar si hay discrepancias, El ciclo de modelado enfatiza que la utilidad surge de la capacidad del modelo para explicar y predecir dentro de sus supuestos, más que de una exactitud absoluta [26].

Antes de decidir qué técnicas utilizar, es crucial determinar el tipo de modelo: estático o dinámico (si muestra o no la evolución a través del tiempo), discreto o continuo (dependiendo de cómo sean las variables y el tiempo). Estas categorizaciones ayudan a decidir si es mejor trabajar con ecuaciones en diferencias (EDO/EDP), o simulaciones con ruido [27].

La base metodológica de esa identificación está ampliamente formalizada, porque se definen criterios de ajuste y validación, y se trata de forma explícita el ruido de medición y las perturbaciones. Lennart Ljung, es el que sustenta la práctica contemporánea en identificación lineal y no lineal que se usa a diario en control [28].

Cuando el sistema incluye subsistemas mecánicos y actuadores, una formulación rigurosa parte del principio de Hamilton y de las ecuaciones de Euler-Lagrange, estableciendo la energía cinética y potencial, incorporando fuerzas generalizadas listas para el análisis y control [29].

Para estructuras esbeltas como un eslabón flexible, la teoría de vigas de Euler-Bernoulli y sus extensiones, combinadas con marcos modernos como el (Floating Frame of Reference FFR) o métodos de modos asumidos, permiten capturar deformaciones y vibraciones acopladas al movimiento rígido [30].

1.4.3. Teoría de Euler-Bernoulli

La teoría de Euler-Bernoulli establece que una estructura elástica sometida a cargas aplicadas a lo largo de su eje longitudinal genera internamente fuerzas cortantes y momentos de flexión, lo cual permite analizar su comportamiento dinámico mediante la ecuación clásica de Euler-Bernoulli. Para ello se asumen deformaciones pequeñas y que las secciones transversales permanecen planas y normales al eje neutro, descartándose efectos de corte y rotación transversal de segundo orden. Por eso se consideran las siguientes premisas fundamentales [31]:

- El eslabón es una barra con características geométricas definidas y distribución de masa uniforme: Esto implica que la deflexión de una sección del eslabón se debe exclusivamente a la flexión y no a efectos de corte.
- El eslabón es flexible únicamente en la dirección lateral y presenta únicamente deformaciones elásticas: Esta propiedad se ve reforzada por la construcción mecánica real, que simula un brazo flexible [32].

En [33] para modelar un sistema rotatorio con eslabón flexible mediante la teoría de Euler-Bernoulli, se utiliza la ecuación estática fundamental :

$$EI \frac{d^4 w(x, t)}{dx^4} = q(x, t), \quad (1)$$

Donde:

- $w(x, t)$ es la deflexión transversal a lo largo del eje x ,
- E es el módulo de Young,
- I el segundo momento de área (inercia a la flexión)
- $q(x, t)$ es la carga distribuida aplicada por unidad de longitud.

Para incluir los efectos dinámicos relevantes, la forma más general de la ecuación de movimiento queda expresada de la siguiente manera:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, t), \quad (2)$$

Donde μ representa la densidad lineal (masa por unidad de longitud) [33].

Bajo la hipótesis clásica de que “las secciones transversales permanecen planas y normales al eje neutro tras la deformación”, la deformación axial en una fibra situada a distancia z del eje neutro se define como :

$$\varepsilon_x = -z \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad (3)$$

- ε_x : es la deformación axial en una fibra del eslabón,
- z : es la distancia perpendicular desde el eje neutro de la viga hacia la fibra donde se evalúa la deformación,
- $\frac{d^2 w}{dx^2}$: es la curvatura local del eslabón o viga [33].

La tensión resultante, aplicando la ley de Hooke, queda expresada de la siguiente manera :

$$\sigma_x = -z E \frac{d^2 w}{dx^2}. \quad (4)$$

- σ_x : tensión axial normal en la fibra derivada de la deformación mediante la ley de Hooke,
- E : módulo de Young del material del eslabón [34].

1.4.4. Principio de Hamilton

Dentro de la mecánica clásica, permite entender como evoluciona un sistema dinámico. Planteando que todas las trayectorias posibles de un sistema pueda seguir entre dos instantes de tiempo, Esta idea no solo resume un principio físico profundo, sino que también ofrece una forma diferente de describir el movimiento sin depender directamente de fuerzas [35].

Dentro de esta estrategia la acción S se define como la integral en el tiempo del Lagrangiano L del sistema, mediante la siguiente formulación:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt \quad (5)$$

donde:

- q : coordenadas generalizadas que describen la configuración del sistema.
- \dot{q} : velocidades generalizadas.
- t : tiempo.
- L : función Lagrangiana del sistema, que contiene la información de su comportamiento dinámico [35].

El principio se expresa matemáticamente como:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt = 0 \quad (6)$$

Esta condición implica que, al realizar pequeñas variaciones virtuales de la trayectoria $q(t)$ que cumplen con las condiciones en los extremos t_1 y t_2 , la variación de la acción es cero [36]. Como resultado, se obtienen las ecuaciones de Euler–Lagrange, que son las ecuaciones de movimiento del sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad (7)$$

En sistemas mecánicos, este enfoque es especialmente útil porque permite obtener el modelo dinámico a partir de un principio unificado, sin necesidad de aplicar directamente las leyes de Newton a cada componente. Esto resulta muy ventajoso en sistemas con múltiples grados de libertad o con comportamiento flexible, ya que el principio se adapta de forma natural a la descripción de dichos sistemas [37].

1.4.5. Modelo de espacio de estados

La representación en espacio de estados es un método ampliamente utilizado en ingeniería de control para describir el comportamiento dinámico de sistemas lineales y no lineales. A diferencia de los modelos puramente basados en funciones de transferencia, esta formulación permite representar de forma directa la interacción entre las variables internas del sistema (estados) y las variables de entrada y salida. Esta metodología es especialmente ventajosa cuando se trata de sistemas con múltiples entradas y salidas, o cuando

se requiere modelar de manera simultánea fenómenos de distinta naturaleza, como la dinámica rotacional y la flexibilidad estructural [38].

El estado del sistema se define como un conjunto mínimo de variables que contienen toda la información necesaria para describir la evolución del modelo general, expresada mediante un sistema de ecuaciones diferenciales que relacionan la derivada de los estados con el estado actual y la entrada, así como una ecuación de salida que vincula las variables observables con los estados internos. En su forma continua se describe como:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8)$$

$$y = Cx + Du \quad (9)$$

Donde:

- x es el vector de estados,
- u es la entrada de control,
- y es la salida del sistema, y
- A , B , C y D son matrices que definen la dinámica y las relaciones de entrada y salida [39].

Este enfoque permite incorporar, de manera estructurada, las características propias de un sistema rotatorio con eslabón flexible, como sus modos de vibración y la interacción entre la base rotatoria y el enlace deformable. El modelo en espacio de estados se construye considerando un conjunto de coordenadas modales y sus velocidades asociadas como vector de estados, definiendo las matrices A , B y C , esta formulación facilita el análisis de estabilidad y el diseño de controladores adaptativos, porque proporciona una relación directa entre las variables medidas y las internas, permitiendo la implementación de algoritmos en tiempo real [40].

Dentro de este contexto la matriz A se define como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1^2 & -2\zeta\omega_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\omega_2^2 & -2\zeta_2\omega_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

La matriz de entrada B , transpuesta para mostrar su forma explícita, es:

$$B^T = \frac{1}{l_T} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & \dots & 0 \frac{d\phi_n(0)}{dx} \end{bmatrix} \quad (11)$$

La matriz de salida C que relaciona el vector de estado con el vector de salida y , se define como :

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{d^2\phi_1(l)}{dx^2} & 0 & \dots & \frac{d^2\phi_n(l)}{dx^2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & 0 & \dots & \frac{d\phi_n(0)}{dx} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} & \dots & 0 & \frac{d\phi_1(0)}{dx} \end{bmatrix} \quad (12)$$

El vector de estado está dado por:

$$X^T = [q_0 \quad \dot{q}_0 \quad q_1 \quad \dot{q}_1 \quad \dots \quad q_n \quad \dot{q}_n] \quad (13)$$

Para la implementación del sistema de control adaptativo, se dispone de los modelos dinámicos para sistemas con elementos flexibles, donde resulta crucial balancear precisión y complejidad. Es una de las estrategias ampliamente aceptadas en la simplificación en un modelo de un solo grado de libertad (1-DOF), siempre y cuando se cumplan ciertas condiciones que justifiquen esta reducción [41].

Una de las principales justificaciones para emplear esta simplificación se basa en que las desviaciones del vínculo flexible sean pequeñas, particularmente cuando la relación de deflexión normalizada w satisface $w < 0,1$. En estos casos, las deformaciones del sistema no son lo suficientemente grandes como para requerir una representación dinámica de orden superior, permitiendo que un modelo de baja dimensión capture adecuadamente la dinámica dominante [42].

1.4.6. Energía cinética del sistema

El sistema está compuesto por una base rotatoria rígida conectada a un eslabón flexible. El motor actúa sobre la base a través de un sistema de engranajes con relación K_g . El enlace, de longitud L , posee una masa distribuida m_l , y la base tiene una masa puntual m_b . Se considera el sistema acoplado eléctricamente mediante una resistencia R , una constante de torque K_t , una constante de fuerza contraelectromotriz K_b , y una constante de motor K_m , todas referidas al sistema motor.

El siguiente cálculo se utiliza para determinar el momento de inercia del eslabón: se considera que este último es una barra delgada con masa repartida de manera uniforme a lo largo de su longitud.

$$I_{\text{link}} = \frac{1}{3}m_{\text{link}}L^2 \quad (14)$$

Donde:

- m_{link} es la masa global del eslabón,
- L se refiere a la longitud del eslabón.

Esta expresión es válida bajo el supuesto de que el eslabón gira alrededor de un extremo fijo, condición común en manipuladores rotatorios con un solo grado de libertad [43].

Además del momento de inercia del propio eslabón, también se debe considerar el efecto de una carga puntual ubicada en la punta del eslabón flexible. Esta carga influye directamente en la dinámica del sistema, incrementando la inercia total vista desde el eje de rotación. El momento de inercia de dicha carga concentrada, se calcula como:

$$I_L = m_L L^2 \quad (15)$$

El momento de inercia total del sistema respecto al eje de rotación se obtiene como la suma del momento de inercia del eslabón y el momento de inercia de la carga en la punta [44].

Se tiene también que el momento de inercia total I_T se expresa de la siguiente manera:

$$I_T = I_{\text{link}} + I_L \quad (16)$$

Reemplazando la ecuación 16 con las ecuaciones 14 y 15, queda representado de la siguiente manera:

$$I_T = \frac{1}{3}m_{\text{link}}L^2 + m_L L^2 \quad (17)$$

Esta ecuación describe el momento de inercia rotacional total del sistema respecto al eje de giro, incorporando las contribuciones del eslabón flexible y de la masa puntual en su extremo, lo cual es crucial para calcular con precisión la energía cinética rotacional del sistema [45].

La base del manipulador se comporta como un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo. Su energía cinética de la base se calcula como:

$$J_{\text{base}} = \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}^2 \quad (18)$$

Donde:

- I_b es el momento de inercia en la base con respecto al eje de giro.
- θ representa la velocidad angular de la base.

Esta contribución energética es fundamental para establecer la dinámica completa del sistema mediante la formulación lagrangiana [46].

La energía cinética del eslabón flexible, modelado como un cuerpo rígido que rota con respecto a la base, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$J_{\text{load}} = \frac{1}{2} I_T (\dot{\theta} - \dot{\alpha})^2 \quad (19)$$

En base a la información, se tiene que la energía cinética total del sistema incluye dos componentes:

- La energía cinética rotacional de la base rígida, modelada por su momento de inercia J_{base} y su velocidad angular $\dot{\theta}$,
- La energía cinética asociada al movimiento del eslabón flexible, modelado aquí como un único modo dominante de vibración (modelo de un grado de libertad), cuya desviación en la punta es α , y su momento de inercia equivalente es J_{load} [46].

Se considera que la punta del eslabón oscila con una velocidad angular relativa opuesta a la base. Por tanto, la energía cinética total queda definida como:

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{base}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{load}} (\dot{\theta} - \dot{\alpha})^2 \quad (20)$$

Desarrollando el segundo término:

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{base}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{\text{load}} (\dot{\theta}^2 - 2\dot{\theta}\dot{\alpha} + \dot{\alpha}^2) \quad (21)$$

Agrupando términos:

$$T = \frac{1}{2}(J_{\text{base}} + J_{\text{load}})\dot{\theta}^2 - J_{\text{load}}\dot{\theta}\dot{\alpha} + \frac{1}{2}J_{\text{load}}\dot{\alpha}^2 \quad (22)$$

Esta ecuación describe el momento de inercia rotacional total del sistema respecto al eje de giro, incorporando las contribuciones del eslabón flexible y de la masa puntual en su extremo [46].

1.4.7. Energía potencial del sistema

La rigidez de la estructura depende tanto de su composición como de la geometría empleada, especialmente en flexión, y su ecuación se define de la siguiente manera:

$$V = \frac{1}{2}K_{\text{stiff}}\alpha^2 \quad (23)$$

Donde:

- K_{stiff} es la constante de rigidez.
- α es el movimiento o desplazamiento de la punta [46].

La rigidez de la estructura es tanto como la estructura como la geometría empleada en ella, tanto en flexión, y su ecuación está definida por:

$$K_{\text{stiff}} = (2\pi f_c)^2 J_{\text{load}} \quad (24)$$

Donde:

- f_c es el frecuencia natural del sistema,
- J_{load} es el momento de inercia total del sistema [46].

1.4.8. Modelo mecánico-eléctrico del motor DC

Para describir la dinámica de un sistema mecánico compuesto por una base giratoria y un eslabón flexible, se recurre al formalismo de Lagrange, el cual permite obtener las ecuaciones de movimiento mediante la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V , además de incorporar los efectos de fuerzas generalizadas no conservativas.

En este caso, las coordenadas generalizadas utilizadas son el ángulo de rotación θ y la deflexión del eslabón flexible α , de modo que las ecuaciones específicas para cada coordenada son:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_{\theta} \quad (25)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = Q_{\alpha} \quad (26)$$

donde Q_{θ} y Q_{α} representan las fuerzas (o pares) generalizadas no conservativas asociadas a θ y α [47].

Resolviendo estas expresiones, se obtienen las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema mecánico compuesto:

$$(J_{base} + I_T)\ddot{\theta} - I_T\ddot{\alpha} = Q_{\theta} \quad (27)$$

$$-I_T\ddot{\theta} + I_T\ddot{\alpha} + K_{stiff}\alpha = Q_{\alpha} \quad (28)$$

Donde:

- J_{base} es el momento de inercia de la base.
- I_T es el momento de inercia del eslabón.
- K_{stiff} es la constante de rigidez del sistema [46].

Como el sistema es accionado únicamente desde la base aplicando una fuerza generalizada, se imponen dos condiciones, donde $Q_{\theta} = \tau$ y $Q_{\alpha} = 0$, estas condiciones se sustituyen en las ecuaciones 27 y 28, quedando representada de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} = -\frac{K_{stiff}}{J_{base}}\alpha + \frac{1}{J_{base}}\tau \quad (29)$$

$$\ddot{\alpha} = -K_{stiff} \left(\frac{1}{I_T} + \frac{1}{J_{base}} \right) \alpha + \frac{1}{J_{base}}\tau \quad (30)$$

Con esto, logramos representar adecuadamente el sistema mecánico del eslabón flexible, considerando tanto la energía cinética y potencial como el momento de inercia total del sistema [46].

En conjunto, se puede pasar a la dinámica del voltaje del motor, que es representada por su sistema eléctrico mediante la ley de voltajes de Kirchhoff, expresada como:

$$V_a(t) = i(t)R + L\frac{di(t)}{dt} + V_b(t) \quad (31)$$

Donde:

- $i(t)$ es la corriente que atraviesa el motor,
- R y L son la resistencia y la inductancia del circuito del motor,
- $V_b(t)$ es la fuerza contraelectromotriz (back-EMF), proporcional a la velocidad del motor [48].

El par desarrollado por el motor está relacionado con la corriente de armadura a través de la constante de par del motor K_t , según la expresión :

$$\tau = K_g \tau_m \quad (32)$$

Donde τ se encuentra principalmente vinculado al par que genera el motor τ_m , esto lo hace mediante la constante de acoplamiento K_g [49].

La relación entre el par generado por el motor $\tau_m(t)$ y la corriente es [49]:

$$\tau_m = i(t) K_T \quad (33)$$

En la ecuación 31 se denota que V_a es el voltaje que sera suministrado al motor, y V_b será la fuerza contraelectromotriz, cuya ecuación se expresa de la siguiente manera [49]:

$$V_b(t) = K_b \omega_m \quad (34)$$

La ecuación 34 tiene relación con el voltaje inducido al motor con la constante de back EMF K_b y tiene relación tambien con la velocidad angular del motor ω_n , entonces la ecuación queda descrita de la siguiente manera [49]:

$$V_b(t) = K_b K_g \omega_b(t) = K_b K_g \dot{\theta}(t) \quad (35)$$

La expresión descrita se reemplaza en la ecuación 31, donde se obtendrá la relación del par del motor y el voltaje aplicado, y queda descrita de la siguiente manera:

$$V_a(t) = \frac{\tau_m(t) R}{K_T} + \left(\frac{L}{K_T} \right) \frac{d\tau_m(t)}{dt} + K_b K_g \dot{\theta}(t) \quad (36)$$

La acción inducida del sistema $\left(\frac{L}{K_T} \right) \frac{d\tau_m(t)}{dt}$, se desprecia porque es pequeña, en comparación de los otros parámetros, por lo tanto, la ecuación queda descrita de la siguiente manera:

$$V_a(t) = \frac{\tau_m(t) R}{K_T} + K_b K_g \dot{\theta}(t) \quad (37)$$

Al despejar τ la expresión nos queda de la siguiente manera [49]:

$$\tau_m(t) = \frac{K_T}{R}V_a(t) - \frac{K_bK_TK_g}{R}\dot{\theta}(t) \quad (38)$$

Una vez obtenido el par de motor en la ecuación 38, se sustituye en la ecuación 32, y queda representado de la siguiente manera:

$$\tau = K_g \left(\frac{K_T}{R}V_a(t) - \frac{K_bK_TK_g}{R}\dot{\theta}(t) \right) \quad (39)$$

Se agrupan los términos, y queda expresada de la siguiente manera:

$$\tau = \frac{K_TK_g}{R}V_a(t) - \frac{K_bK_TK_g^2}{R}\dot{\theta}(t) \quad (40)$$

Una vez obtenido el par de motor podemos sustituirlo en las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento dinámico del sistema mecánico-eléctrico descritas en las ecuaciones 29 y 30, quedando de la siguiente manera:

$$\ddot{\theta} = -\frac{K_{\text{stiff}}}{J_{\text{base}}}\alpha + \frac{K_TK_g}{RJ_{\text{base}}}V_a(t) - \frac{K_bK_TK_g^2}{RJ_{\text{base}}}\dot{\theta}(t) \quad (41)$$

$$\ddot{\alpha} = -K_{\text{stiff}} \left(\frac{1}{I_T} + \frac{1}{J_{\text{base}}} \right) \alpha + \frac{K_TK_g}{RJ_{\text{base}}}V_a(t) - \frac{K_bK_TK_g^2}{RJ_{\text{base}}}\dot{\theta}(t) \quad (42)$$

Finalmente se obtienen las matrices de estados que describen la dinámica del sistema, y las variables de estados quedan representadas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{K_{\text{stiff}}}{J_{\text{base}}L} & -\frac{(K_mK_g)^2}{J_{\text{base}}R} & 0 \\ 0 & -K_{\text{stiff}} \left(\frac{J_{\text{load}}+J_{\text{base}}}{LJ_{\text{base}}J_{\text{load}}} \right) & -\frac{(K_mK_g)^2}{J_{\text{base}}R} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \\ \dot{\theta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_mK_g}{J_{\text{base}}R} \\ -\frac{K_mK_g}{J_{\text{base}}R} \end{bmatrix} V_a \quad (43)$$

Las salidas del sistema se definen por medio de la siguiente matriz:

$$y^T = [\theta : \alpha] \quad (44)$$

Como en este caso solo se medirán dos valores, θ que será la posición del eslabón y α que será la punta del enlace, por eso las matrices C y D, se definirán de la siguiente manera:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$D = [0; 0] \quad (46)$$

Con estas matrices finales, se establece una base sólida para el desarrollo de los siguientes cálculos requeridos en el diseño del sistema de control adaptativo [49]. Estas representaciones matriciales permiten describir con precisión el comportamiento dinámico del sistema, integrando tanto la respuesta mecánica del eslabón flexible como la influencia del actuador eléctrico.

1.4.9. Control adaptativo por modelo de referencia

El control adaptativo se caracteriza por su capacidad de ajustarse automáticamente ante las variaciones en la dinámica del sistema y a las perturbaciones externas, manteniendo así, un desempeño óptimo. Se considera un tipo de control no lineal donde el estado del proceso puede separarse en dos escalas de tiempo, que evolucionan a distinta velocidad. La llamada escala lenta corresponde a los cambios en los parámetros (y por ende, a la velocidad a la que el regulador los ajusta), mientras que la escala rápida abarca la dinámica ordinaria del lazo de control [50].

El control adaptativo por modelo de referencia (MRAC), busca garantizar que la salida del proceso real siga el comportamiento de un modelo de referencia predefinido, donde es posible conservar un rendimiento aceptable incluso frente a situaciones difíciles de controlar. Una ventaja importante del MRAC es que no requiere conocer con exactitud los parámetros del sistema a controlar, porque basta con definir un modelo de referencia adecuado que represente el comportamiento deseado, y el controlador adaptativo por modelo de referencia ajustará sus ganancias para forzar que la planta siga a ese modelo [51].

En un esquema MRAC, la salida del modelo de referencia y_m se compara continuamente con la salida del proceso real y_p , y la diferencia entre ambas se utiliza para generar las señales de control apropiadas. A este diferencial se le denomina error de seguimiento $e = y_m - y_p$, el cual alimenta un mecanismo de adaptación que modifica los parámetros del controlador en tiempo real, con el objetivo de minimizar dicho error hasta hacerlo tendencialmente cero. En esencia, el controlador aprende en línea y autoajusta sus ganancias para que la planta imite la respuesta del modelo de referencia [51].

1.4.10. Modelo de referencia

El modelo de referencia proporciona la trayectoria dinámica ideal que se desea para el sistema, por lo que típicamente se escoge un modelo estable y con buen rendimiento como guía. Para asegurar que el sistema adaptativo

resultante sea estable y que el error de seguimiento converja a cero, las leyes de control del MRAC suelen derivarse aplicando la teoría de estabilidad de Lyapunov. De este modo se garantiza matemáticamente la estabilidad del lazo adaptativo, a la vez que el controlador logra que la diferencia entre la salida real y la del modelo de referencia desaparezca en régimen permanente [52].

El modelo de referencia se describe de la siguiente manera:

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r(t) \quad (47)$$

- $r(t)$ es la señal de referencia externa, la cual es conocida y se utiliza como entrada para el modelo.
- $x_m(t)$ Es la condición del modelo de planta de referencia que se logra a través de la simulación del mismo.
- A_m es una matriz de estado fijo, que explica el comportamiento del modelo.
- B_m es la matriz de control efectivo [53].

Por estabilidad del lazo adaptativo, el modelo de referencia debe ser estrictamente estable en espacios de estados, esto equivale a exigir que A_m sea una matriz de Hurwitz (todos sus valores con parte real negativa), asegurando el ajuste planta–modelo para control por realimentación de estados,

$$A - BK_x = A_m \quad BK_r = B_m$$

B_m debe de ser colineal con respecto a la matriz B para que existan ganancias ideales de K_x, K_r para lograr un seguimiento perfecto [54]. Con estas consideraciones, el modelo de referencia queda de la siguiente manera:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,58 \omega_n^2 & -2,52 \omega_n^2 & -0,54 \omega_n^2 & 5,74 \omega_n^2 \\ 0,58 \omega_n^2 & -22,26 \omega_n^3 & 0,54 \omega_n^2 & -5,74 \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,58 \omega_n^2 \\ -0,58 \omega_n^2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

La estructura de A_m sirve para escalar coherentemente la dinámica deseada del sistema. Estos coeficientes adimensionales se fijaron mediante un

ajuste de desempeño (minimizando el error de forma entre la respuesta del modelo y la de la planta ante un escalón), de manera que θ y α sean efectivas.

Con el objetivo de evitar la excitación del enlace flexible del eslabón, la frecuencia natural del modelo de referencia ω_n se fijó como una fracción de la frecuencia dominante asociada a la deflexión α . En sistemas flexibles se adoptó una fracción conservadora $k \in [0,2 - 0,5]$, quedando:

$$\omega_n = k \omega_\alpha \quad (50)$$

$$\omega_\alpha \approx 2\pi f_c \quad (51)$$

Donde f_c es la frecuencia natural [55] modo flexible medida experimentalmente (o estimada a partir del modelo). Esta elección limita la demanda dinámica sobre el actuador y reduce la interacción con la flexibilidad del enlace.

Para corroborar que ω_α usada corresponde al modo que más afecta a α , se aplica un criterio de participación modal sobre el modelo linealizado. Sea A la matriz de estados de la planta, con autovalores (λ_i) y autovectores (v_i). Denotando (C_α) a la segunda fila de C (salida α), se evalúa:

$$p_i = |C_\alpha v_i| \quad (52)$$

Ignorando polos en el origen (integradores). La frecuencia es:

$$\omega_\alpha = \sqrt{(\operatorname{Re} \lambda_i)^2 + (\operatorname{Im} \lambda_i)^2} \quad (53)$$

Donde ω_α es la frecuencia natural del modo flexible dominante [56].

1.4.11. Modelo de perturbación e incertidumbre

El bloque de referencia aplicado para el control adaptativo, mantiene un registro que representa el modelo de la perturbación y la incertidumbre del sistema controlado, la ecuación queda descrita como:

$$u_{\text{ad}} = \mathbf{w}^T \boldsymbol{\phi}(x) \quad (54)$$

- \mathbf{w}^T : Transpuesta del vector de pesos adaptativos.
- $\boldsymbol{\phi}(x)$: Vector de funciones base (o regresores) que depende del estado del sistema x . Estas funciones ayudan a aproximar las incertidumbres y perturbaciones del sistema [57].

Esta formulación es adecuada en situaciones donde las perturbaciones y la incertidumbre son no lineales y no se dispone de un modelo exacto del sistema, como ocurre en el caso del eslabón flexible estudiado en este trabajo.

1.4.12. Control adaptativo por modelo de referencia indirecto

En la figura 1 muestra un controlador adaptativo por modelo de referencia indirecto, que se caracteriza por estimar los parámetros del modelo del sistema en tiempo real mediante un observador o estimador. Con base en estos parámetros actualizados, se ajusta el controlador para asegurar que el sistema responda adecuadamente. En este enfoque, primero se identifica como varía el sistema y luego se ajusta el control, siendo ideal para sistemas donde se puede obtener una buena estimación del modelo [58].

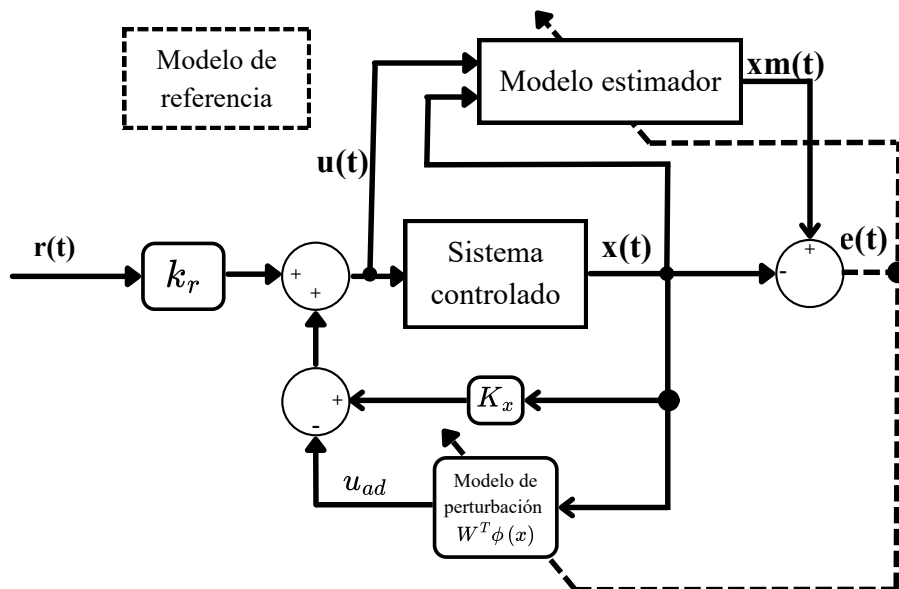


Figura 1: Diagrama de bloques control adaptativo indirecto [59]

1.4.13. Control adaptativo por modelo de referencia directo

En la figura 2, muestra un controlador adaptativo por modelo de referencia directo, este actúa directamente sobre los parámetros del controlador sin necesidad de estimar explícitamente el modelo de la planta. Se utilizan señales de error y entrada del sistema, para modificar continuamente la ley de control. Este método es útil cuando no se cuenta con un modelo preciso del sistema, permitiendo una adaptación inmediata en situaciones dinámicas [60].

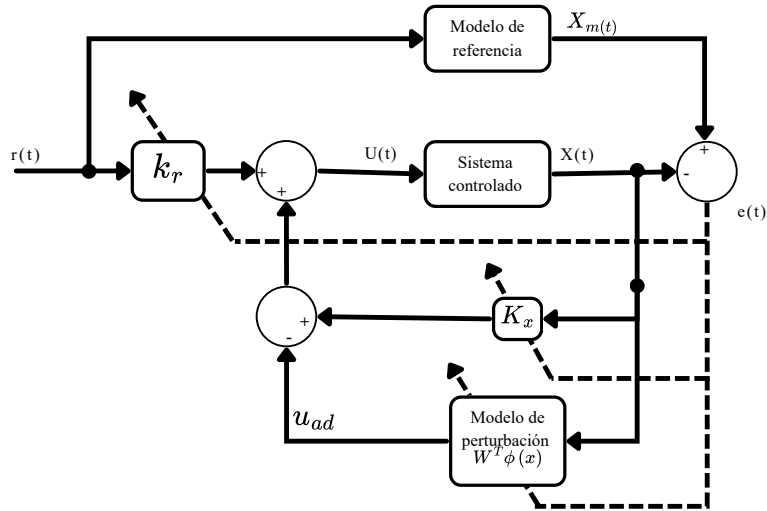


Figura 2: Diagrama de bloque control adaptativo directo [60]

Un MRAC directo no requiere conocer exactamente el modelo matemático del sistema. En su versión directa, esto lo hace ideal para sistemas con parámetros inciertos o variables. La señal de control generada queda expresada como:

$$u(t) = K_x(t)x(t) + K_r(t)r(t) - u_{ad} \quad (55)$$

- $x(t)$: Es el estado del sistema controlado.
- $r(t)$: Es la señal de referencia externa.
- k_x y k_r : Son las ganancias del controlador de retroalimentación y avance [60].
- u_{ad} : Es el modelo de perturbación descrita por la ecuación 54.

1.4.14. Actualizaciones de parámetros

Para lograr un control adaptativo eficaz frente a perturbaciones e incertidumbres del sistema, se emplean leyes de actualización de parámetros basadas en ecuaciones diferenciales. Estas ecuaciones ajustan dinámicamente las ganancias asociadas al estado del sistema (k_x), a la señal de referencia

(k_r) y a los pesos del modelo de perturbación (w), de forma proporcional al error de seguimiento $e(t)$ y a la dinámica del sistema definida por P y B [60]:

$$\dot{k}_x = \Gamma_x x(t) e^T(t) P B \quad (56)$$

$$\dot{k}_r = \Gamma_r r(t) e^T(t) P B \quad (57)$$

$$\dot{w} = \Gamma_w \phi(x) e^T(t) P B \quad (58)$$

1.4.15. Modificación del aprendizaje en la actualización de parámetros

Esta modificación se realiza para aumentar la robustez del sistema, en este caso se utilizará la modificación sigma, dicho término calcula el momento para cada actualización de parámetro, siendo el producto del parámetro de ponderación σ por el valor actual, la siguiente modificación representa la actualización de parámetros con el término sigma (σ).

$$\dot{k}_x = \Gamma_x x(t) e^T(t) P B - \sigma k_x \quad (59)$$

$$\dot{k}_r = \Gamma_r r(t) e^T(t) P B - \sigma k_r \quad (60)$$

$$\dot{w}_x = \Gamma_w \phi(t) e^T(t) P B - \sigma w \quad (61)$$

- $\dot{k}_x, \dot{k}_r, \dot{w}_x$: son la derivada temporal de las ganancias adaptativas asociadas al estado del sistema.
- $\Gamma_x, \Gamma_r, \Gamma_w$: Son las ganancias adaptativas que determinan la velocidad de adaptación.
- $x(t)$: Vector de estados del sistema en el instante t .
- $e(t)$: Vector de error de seguimiento o error de control en el instante t .
- P : Matriz de la ecuación de Lyapunov.
- B : Matriz de entrada del sistema.
- σ : Término de modificación sigma que ofrece robustez.
- $r(t)$: Referencia de la señal.
- $\phi(t)$: Vector de funciones base o regresores en el instante t [60].

1.4.16. Cálculo de las ganancias adaptativas

El ajuste en línea de K_x , K_r y w se formula con un criterio de Lyapunov estándar para MRAC. La idea es construir una función donde la derivada no sea positiva si las leyes de adaptación cancelan los términos de cruce. Para ello se tiene que la matriz de peso del error se fija un modelo de referencia estable A_m descrito en la ecuación 48 y se define que $P > 0$ para la solución de Lyapunov.

$$A_m^\top P + P A_m = Q \quad Q = I \quad (62)$$

Se emplea el vector PB . En la ley adaptativa estándar aparece el factor escalar $g(t) = e^\top(t)PB$, por lo que la sensibilidad de adaptación queda naturalmente escalada por $\|PB\|$. Para evitar que la rapidez de aprendizaje dependa de esa escala numérica, se normalizan las ganancias con $\|PB\|^2$ [61].

$$PB = PB \quad \|PB\| = \sqrt{(PB)^\top(PB)} \quad (63)$$

Cuando se dispone de un modelo de referencia base A_m^{ref} (usado sólo para escalar), se corrige la disparidad de escalas mediante:

$$A_m^{\text{ref}\top} P_{\text{ref}} + P_{\text{ref}} A_m^{\text{ref}} = Q \quad \text{scale} = \left(\frac{\|P_{\text{ref}} B\|}{\|PB\|} \right)^2 \quad (64)$$

Si $\|PB\|$ crece, las ganancias se ajustan para conservar una respuesta de adaptación comparable [61]. Para el cálculo de las leyes de adaptación se hace el uso de la ecuación 50, y se aplica la corrección de escala.

$$\omega_{ad,eff} = \omega_n \cdot \text{scale}. \quad (65)$$

Finalmente, las ganancias adaptativas se toman como:

$$\Gamma_x = \frac{\omega_{ad,eff}}{\|PB\|^2}, \quad \Gamma_r = \frac{0,7 \omega_{ad,eff}}{\|PB\|^2}, \quad \Gamma_w = \frac{0,5 \omega_{ad,eff}}{\|PB\|^2} \quad (66)$$

Las tres ganancias comparten la misma escala temporal y difieren por factores relativos (0.7 y 0.5) que ponderan la contribución del término de referencia y del compensador w [62].

Se añade una fuga lineal para el cálculo del término de robustez (σ) con el fin de evitar una derivada paramétrica en caso de ruido, incertidumbres no modeladas o excitación insuficiente.

$$\sigma = -\frac{1}{dt} \ln(\lambda), \quad \lambda \in (0, 1), \quad (67)$$

Es una versión continua de un forgetting factor discreto λ , que es una fuga $\approx 0,1\%$ por paso). Como alternativa, puede usarse $\sigma = \rho\omega_{ad,eff}$ con $\rho \in [0,01 - 0,10]$ [61].

1.5. Marco contextual

Desarrollar tecnologías en el sector de la ingeniería en automatización es crucial para que los alumnos tengan una formación completa y estén preparados para afrontar los desafíos de las industrias a nivel local y mundial. Con el objetivo de mejorar el uso de simulaciones avanzadas, este proyecto tiene como finalidad favorecer a la Universidad Estatal Península de Santa Elena (UPSE). El desarrollo de un sistema de control adaptativo por modelo de referencia directa en un ambiente simulado posibilitará que los alumnos entiendan el funcionamiento de sistemas flexibles y enfrenten dificultades relacionadas con la estabilidad, promoviendo de este modo un aprendizaje práctico que puede ser utilizado en situaciones reales en la industria.

Este proyecto establece una base para aprender sobre el control adaptativo. A pesar de que las simulaciones son una herramienta valiosa en la educación, es fundamental tener en cuenta sus restricciones en cuanto a precisión y habilidad para responder ante situaciones industriales con alta demanda. Por este motivo, su uso se enfocará sobre todo en fines experimentales y educativos. Para alcanzar un rendimiento más alto y resultados más exactos, será preciso acudir a sistemas físicos que contengan elementos de una complejidad tecnológica mayor.

A nivel global, el control automático ha tenido un desarrollo significativo, impulsando la eficiencia, precisión e innovación en diversos procesos industriales. Esta disciplina es considerada un pilar fundamental dentro de la ingeniería moderna, desempeñando un papel esencial en el avance tecnológico [63].

En Latinoamérica, y específicamente en Ecuador, el control automático es una oportunidad fundamental para que sectores como la energía, la manufactura y otros ámbitos industriales se expandan. El Banco Interamericano de Desarrollo ha destacado la capacidad de esta disciplina para revolucionar áreas clave, lo cual fomentaría un desarrollo tecnológico y económico sustentable en el país [64].

El aprendizaje del alumno y el progreso de la investigación se verán reforzados a través del análisis del control adaptativo por modelo de referencia directa en entornos simulados, lo que posibilitará investigar soluciones novedosas que se puedan implementar en sistemas industriales más complejos desde un punto de vista experimental y académico.

2. Métodos y diseño experimental

2.1. Métodos

El trabajo de investigación se enmarca en un enfoque aplicado y experimental de tipo simulado, basado en el uso de herramientas computacionales para validar estrategias de control en sistemas dinámicos. Para ello, se emplearon los siguientes métodos:

2.1.1. Investigación documental

Se llevó a cabo una revisión bibliográfica enfocada en conceptos clave de control adaptativo, dinámica de sistemas flexibles y fundamentos matemáticos aplicados al modelado en espacio de estados. Esta fase fue esencial para comprender el funcionamiento de los sistemas rotatorios con eslabones flexibles y seleccionar el enfoque MRAC (Model Reference Adaptive Control) como estrategia de control principal. Las fuentes consultadas incluyeron artículos científicos, libros especializados y documentos técnicos sobre sistemas de segundo orden, adaptación por ganancia variable y comportamiento de sistemas con resonancia estructural.

2.1.2. Modelado y simulación

A partir de los parámetros físicos del sistema rotatorio con eslabón flexible, se desarrolla un modelo dinámico linealizado en espacio de estados que describe la interacción entre la base giratoria y el eslabón flexible. El modelo considera tanto las inercias involucradas como la flexibilidad del eslabón, obtenida mediante relaciones mecánicas con la frecuencia natural del sistema. Todo el desarrollo se implementó en MATLAB–SIMULINK® R2022b mediante integración de Euler con paso de tiempo fijo, para garantizar la consistencia entre simulación y control.

2.1.3. Diseño e Implementación del Control Adaptativo

Se desarrolló un controlador adaptativo directo fundamentado en el principio MRAC, que incorpora un modelo de referencia de tercer orden para la base rotativa. Se establecieron leyes de adaptación con una ganancia constante y la opción de modificar sigma, con el objetivo de incrementar la solidez frente a errores persistentes. En tiempo real, se usaron las variables de estado y la discrepancia con el modelo de referencia para ajustar las ganancias adaptativas. Para emular un actuador real, la señal de control fue restringida a un rango físico máximo.

2.1.4. Evaluación y Análisis de Desempeño

Las simulaciones se ejecutaron con entradas tipo escalón y condiciones iniciales nulas. Se evaluó el comportamiento de la posición angular de la base y de la deflexión del eslabón bajo el control adaptativo. A partir de los datos simulados se calcularon métricas clásicas de desempeño, como el tiempo de establecimiento, sobreelongación, error en estado estacionario y asentamiento máximo. Estas métricas se calcularon directamente en MATLAB mediante funciones personalizadas, lo que permitió cuantificar el comportamiento dinámico sin necesidad de ecuaciones analíticas externas. Esta metodología validó la eficiencia del controlador diseñado en condiciones simuladas.

2.2. Descripción del proyecto

Este proyecto de tesis tiene como objetivo diseñar e implementar un sistema de control adaptativo por modelo de referencia (MRAC directo) para un sistema rotatorio experimental de un eslabón flexible. El proceso comienza con el desarrollo de un modelo matemático detallado del sistema, utilizando el enfoque lagrangiano basado en las energías cinética y potencial, junto con el acoplamiento mecánico-eléctrico del motor. A partir de esto, se obtiene un modelo en espacio de estados que describe el comportamiento dinámico del sistema.

Una vez que se tiene el modelo matemático, se realiza una simulación del sistema en lazo abierto sin control, con el fin de observar como responde ante señales de entrada tipo escalón. Estas pruebas permiten identificar las principales características del sistema, como oscilaciones no deseadas y posibles inestabilidades.

A continuación, se lleva a cabo el controlador adaptativo MRAC directo, comenzando con una simulación en MATLAB[®] del sistema usando el modelo en espacio de estados obtenido anteriormente. Después de verificar el rendimiento en MATLAB[®], se transfiere el modelo a Simulink. En esta plataforma, se elabora la estructura integral del controlador adaptativo mediante bloques específicos para MRAC. Esta táctica establece un modelo de referencia constante que simboliza el comportamiento esperado. El controlador ajusta, en tiempo real, sus ganancias de retroalimentación y avance según el error de seguimiento entre el modelo de referencia y el sistema real. Asimismo, implementa una modificación sigma con el fin de optimizar la estabilidad del aprendizaje.

Para validar el desempeño del controlador, se realizan simulaciones en lazo cerrado con el MRAC aplicado, exportando los resultados de Simulink a MATLAB[®] para una mejor visualización. Se comparan las salidas del sistema

antes y después de aplicar el control, analizando si el ángulo de rotación sigue adecuadamente la referencia y si se reducen las oscilaciones en el sistema. También se analiza la señal de control aplicada (voltaje del motor) y su relación con la respuesta del sistema.

Finalmente, se presenta un análisis de resultados con gráficas y conclusiones, mostrando la efectividad del controlador adaptativo por modelo de referencia directo aplicado al sistema rotatorio con eslabon flexible y validando que cumple con los objetivos planteados.

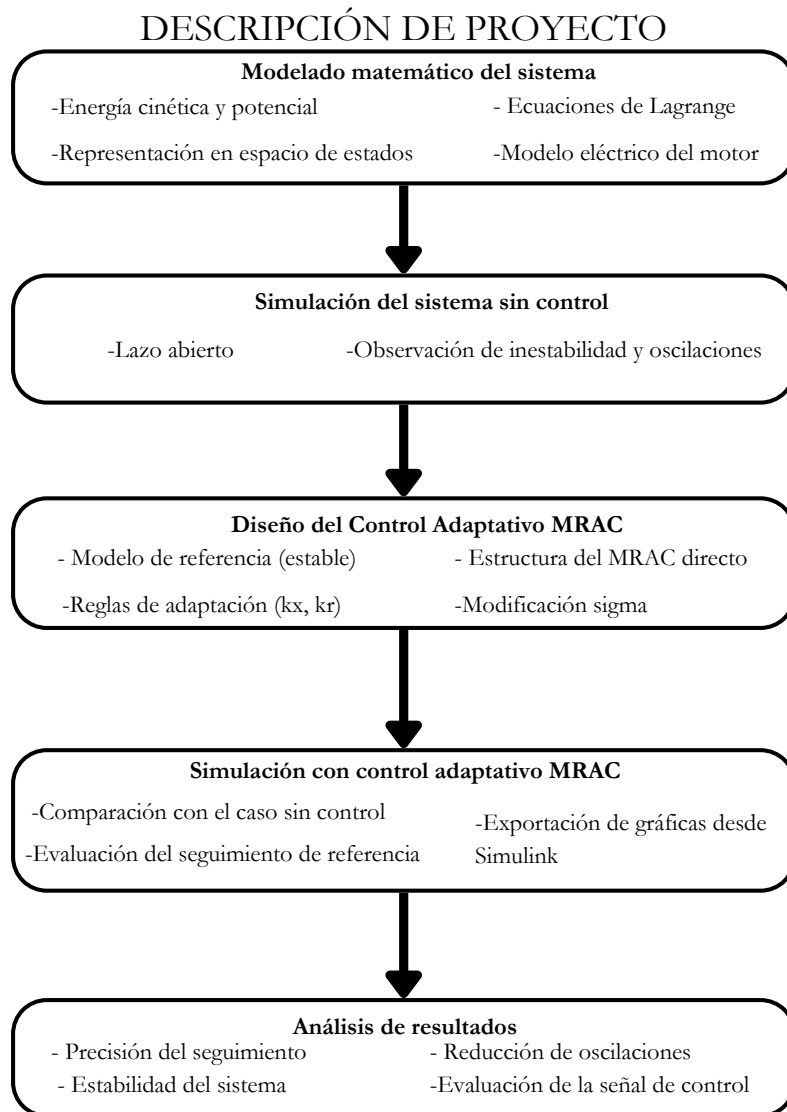


Figura 3: Descripción del proyecto

2.3. Componentes lógicos

A continuación, se describen los programas de software que se utilizarán para llevar a cabo la simulación del sistema del eslabón flexible, con el fin de analizar su comportamiento ante la aplicación del control adaptativo.

2.3.1. Software MATLAB

MATLAB[®] brinda un entorno versátil y funcional para facilitar la técnica computacional en diversas áreas de la ingeniería, como serían:

- Análisis de datos.
- Simulación de sistemas físicos.
- Desarrollo de algoritmos de programación o pseudocódigos.
- Visualización de resultados de los sistemas físicos que se simulan.

El entorno de simulación se caracteriza principalmente por su enfoque interactivo y por su sintaxis intuitiva, facilita la implementación y el análisis de algoritmos complejos de los sistemas físicos[65].

Se caracteriza principalmente porque tiene la capacidad de poder operar de forma natural con vectores y matrices, permitiendo que se puedan realizar cálculos de manera eficiente y concisa para la obtención o análisis de datos. El lenguaje de programación que utiliza está estrechamente vinculado con la notación matemática convencional, lo que permite una transición fluida entre la teoría y la implementación práctica de modelos computacionales. Tiene incorporadas bibliotecas de funciones que está ya previamente predefinidas que ayudan abarcar una alta gama de aplicaciones, incluyen, algebra lineal, estadística, análisis de señales, aprendizaje autónomo, teoría de grafos, entre otras funciones [66].

El entorno de desarrollo es fundamental porque permite la interpretación de datos, la validación de los modelos y la generación de gráficos, que representan de manera clara las relaciones complejas entre variables. Permitiendo estructurar el trabajo en formas de scripts o archivos ejecutables, a través de los llamados live scripts, es posible integrar código, resultados, comentarios explicativos, formulas matemáticas, tablas e imágenes en un solo archivo ejecutable, facilitando la comprensión y presentación hacia terceros[67].

Tiene la capacidad de poder ejecutarse localmente, pero también cuenta con plataformas de aprendizaje en línea como MATLAB Onramp, brindando formación interactiva gratuita sobre los concepto fundamentales o principales del software, considerada una de las herramientas esenciales para el aprendizaje académico y profesional para el desarrollo de soluciones computacionales robustas. Es uno de los software considerado o pensado principalmente para los investigadores, ingenieros, científicos y docentes que requieren de una plataforma confiable y eficiente para la capacidad de ver gráficas y la potencia que tiene el procesamiento numérico [68].

2.3.2. Simulink

Es una de las herramientas desarrolladas por MathWorks, que se encuentra incorporada en Matlab, facilitando el diseño, simulación y análisis de sistemas dinámicos a través de un enfoque gráfico. Este entorno de desarrollo utiliza diagramas de bloques, permitiendo representar los sistemas visualmente a la lógica de distintas áreas como la eléctrica, mecánica, térmica y de control [69].

Ofrece una amplia gama de características avanzadas, haciendo que sea una herramienta esencial para ingenieros, investigadores y desarrolladores de sistemas embebidos, uno de sus principales modelos es el editor gráfico de bloques que permite construir diagramas jerárquicos, útil para simular sistemas de control, circuitos eléctricos, procesos físicos o modelos híbridos, permitiendo la visualización del comportamiento dinámico en tiempo real[70].

Otras de sus funcionalidades es la facilidad de poder interactuar con Matlab, porque permite incorporar algoritmos desarrollados en el entorno de simulink, mediante el bloque de Matlab Function, permite extraer o analizar datos simulados directamente con comandos de Matlab.

Principales atributos:

- Editor gráfico para crear y administrar diagramas de bloques jerárquicos.
- Bloques previamente establecidos para modelar sistemas discretos o continuos.
- Scopes y otros tipos de visualizaciones de datos para observar los resultados obtenidos en la simulación.
- Herramientas de análisis de modelos para refinar la arquitectura del modelo y aumentar la velocidad de la simulaciones [71].

2.4. Diseño del controlador en MATLAB–SIMULINK®

En esta sección se detalla el enfoque general implementado en el entorno de MATLAB–SIMULINK®R2022b, incluyendo los pasos seguidos para modelar la planta, el sistema de referencia y la ley de control adaptativa. Asimismo, se considera la incorporación de un término adicional en el controlador con el objetivo de mejorar la robustez del sistema frente a variaciones en los parámetros o perturbaciones externas.

2.4.1. Modelado y análisis de la planta en lazo abierto

Para iniciar el diseño del sistema del controlador adaptativo por modelo de referencia directo, se realiza una simulación del sistema rotatorio con eslabón flexible en condiciones de lazo abierto, es decir, sin aplicar ningún tipo de control, con el fin de poder comprender como responde naturalmente la planta ante distintas señales de entrada, y también poder identificar el comportamiento dinámico de las variables del sistema, estableciendo una base para comparar el efecto del controlador más adelante.

El código fue desarrollado en MATLAB[®], partiendo del modelo matemático en espacio de estados previamente obtenido, donde se considera una aproximación lineal del sistema a partir de sus parámetros físicos reales. La tabla 1 resume los valores utilizados para cada uno de los componentes del sistema, tales como:

Tabla 1: Parámetros físicos del sistema rotatorio con eslabón flexible

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidades
Tamaño del eslabón	L	0.45	m
Masa del eslabón	m_l	0.0008	kg
Momento de inercia del eslabón	J_{link}	0.0042	kg·m ²
Masa de base	m_b	0.05	kg
Resistencia del motor	R	2.6	Ω
Relación de engranaje	K_g	70	-
Torque constante	K_t	0.00767	N·m/A
Fuerza contraelectromotriz	K_b	0.00767	V·s/rad
Constante del motor	K_m	0.00767	N·m/A o V·s/rad
Frecuencia natural	f_c	1.9	Hz
Inercia del engranaje	J_b	$m_b \cdot L^2$	kg·m ²
Inercia total	J_{load}	$J_{link} + J_b$	kg·m ²
Constante de rigidez	K_{stiff}	$(2\pi f_c)^2 \cdot J_{load}$	N·m/rad
Inercia de base	J_{base}	0.002	kg·m ²

Los parámetros son reemplazados en las matrices descritas por las ecuaciones 43, 45, 46 permitiendo determinar el modelo en espacio de estados (A, B, C, D), describiendo la dinámica del sistema de forma compacta. Estas matrices quedan descritas de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2268,39697686504 & -55,434925 & 0 \\ 0 & -2585,10161586889 & 55,434925 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 103,25 \\ -103,25 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Una vez definidas las matrices, se procede a simular el sistema mediante integración numérica usando el método de Euler, con un paso de tiempo fijo de $dt = 0,001$ segundos. Las condiciones iniciales del sistema se establecieron en cero para todas las variables de estado.

En la simulación, se utilizó una señal de entrada del tipo escalón múltiple, que oscilaba entre valores negativos y positivos (1 V, -1 V, 0.5 V, -0.5 V y 0.8 V) a lo largo de diversos intervalos temporales. Esta señal busca excitar suficientemente el sistema y observar tanto su respuesta transitoria como estacionaria frente a diferentes exigencias.

Las variables de estado simuladas corresponden a: θ que es la posición angular de la base rotatoria y $\alpha(t)$ siendo la deflexión del eslabón flexible, siendo medidas en grados. Las salidas del sistema se representan gráficamente para su análisis visual, permitiendo evaluar la estabilidad, oscilaciones y el nivel de respuesta del sistema sin control. Este estudio previo resulta clave para entender como se comporta la planta por sí sola y sirve como base para validar la efectividad del controlador adaptativo que se implementará posteriormente.

2.5. Modelo de referencia directo en lazo cerrado

Se llevó a cabo una simulación en lazo cerrado del sistema rotatorio con eslabón flexible, usando como referencia el modelo dinámico en espacio de estados que fue descrito anteriormente por las ecuaciones 43, 45 y 46, para medir la eficacia de un esquema de control adaptativo basado en modelo de referencia directo (MRAC). El propósito de este controlador es garantizar que el sistema real se ajuste a la conducta de un modelo de referencia deseado, incluso cuando existan incertidumbres o variaciones en la dinámica de la planta.

El modelo de referencia adoptado es de cuarto orden, las frecuencias permiten calcular las matrices para garantizar que el sistema deseado tenga un comportamiento dinámico estable, rápido y con adecuado amortiguamiento, con las ecuaciones 50 y 51 se obtienen los siguientes valores, representados en la tabla 2:

Tabla 2: Parámetros para el cálculo del modelo de referencia

Parámetro	Símbolo	Valor
Frecuencia natural estructural	ω_α	11,94 rad/s
Factor de separación (adoptado)	k	0,3
Frecuencia del modelo de referencia	ω_n	2,386 rad/s

En este caso, se utilizará ω_n para construir las matrices A_m y B_m , manteniendo $C_m = C$ y $D_m = D$ para que el error de seguimiento se defina sobre las mismas salidas físicas. Este valor se reemplaza en las ecuaciones 48 y 49 permitiendo obtener las matrices del modelo de referencia, quedando de la siguiente manera:

$$A_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3,3019 & -14,3463 & -3,0742 & 32,6778 \\ 3,3019 & -302,3685 & 3,0742 & -32,6778 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3,3019 \\ -3,3019 \end{bmatrix}$$

Para el diseño del controlador se fundamenta en la ley de adaptación en línea de las ganancias K_x , K_r y W . Para su cálculo, se emplean las expresiones de las ganancias adaptativas dadas en las ecuaciones 66 y 67. Los valores adoptados se presentan en la Tabla 3.

Tabla 3: Parámetros de ganancias adaptativas

Parámetro	Símbolo	Valor
Γ_x	Γ_x	0.04781766489
Γ_r	Γ_r	0.03347236542
Γ_w	Γ_w	0.02390883245
Sigma	σ	1.000500334

Estos valores fueron seleccionados mediante pruebas iterativas y simulaciones que permitieron verificar que el sistema converge de forma adecuada, manteniendo un equilibrio entre rapidez de adaptación y robustez frente a perturbaciones externas o incertidumbres en el modelo.

El sistema se simula durante 20 segundos con un paso de integración de $dt = 0,001$ segundos, utilizando el método de Euler explícito. La entrada de referencia $r(t)$ es una señal de tipo escalón de valor constante igual a 1. Las condiciones iniciales de los vectores de estado del sistema x , del modelo de referencia x_m , las ganancias adaptativas K_x , K_r , w y las salidas y , y_m , u , e para toda la duración de la simulación se pusieron en cero.

Durante la simulación, se calcularon en cada instante de tiempo lo siguiente:

- Las salidas de la planta y del modelo de referencia,
- El error de seguimiento $e = x_m - x$, que viene representado por la diferencia entre la salida de la planta del modelo de referencia y de la planta real.
- El cálculo del modelo de perturbación descrita por la ecuación 54, para facilitar la señal de control.
- La señal de control adaptativa $u(t)$ descrita por la ecuación 55, ayudando así a que el sistema sea controlado.
- Los cálculos para la actualización de los parámetros en tiempo real para el sistema, estos cálculos fueron realizados gracias a las ecuaciones 56, 57 y 58, si se quiere aumentar la robustez al sistema, se reemplazan por las ecuaciones 59, 60 y 61.

Este procedimiento permitió implementar de forma computacional la técnica de control adaptativo por modelo de referencia directo (MRAC), y observar su desempeño en un sistema rotatorio con eslabón flexible.

2.5.1. Implementación en simulink

Para la implementación en simulink ya se ha revisado y estudiado el control adaptativo por modelo de referencia directo, se tienen claras sus ecuaciones a utilizar y en que se utilizan, una vez ya hecho los cálculos en MATLAB®, y comprobado la funcionalidad, también se puede realizar su implementación en SIMULINK para comprobar su funcionamiento. Aquí se utilizará la misma lógica matemática para que el sistema logre ser estable y robusto.

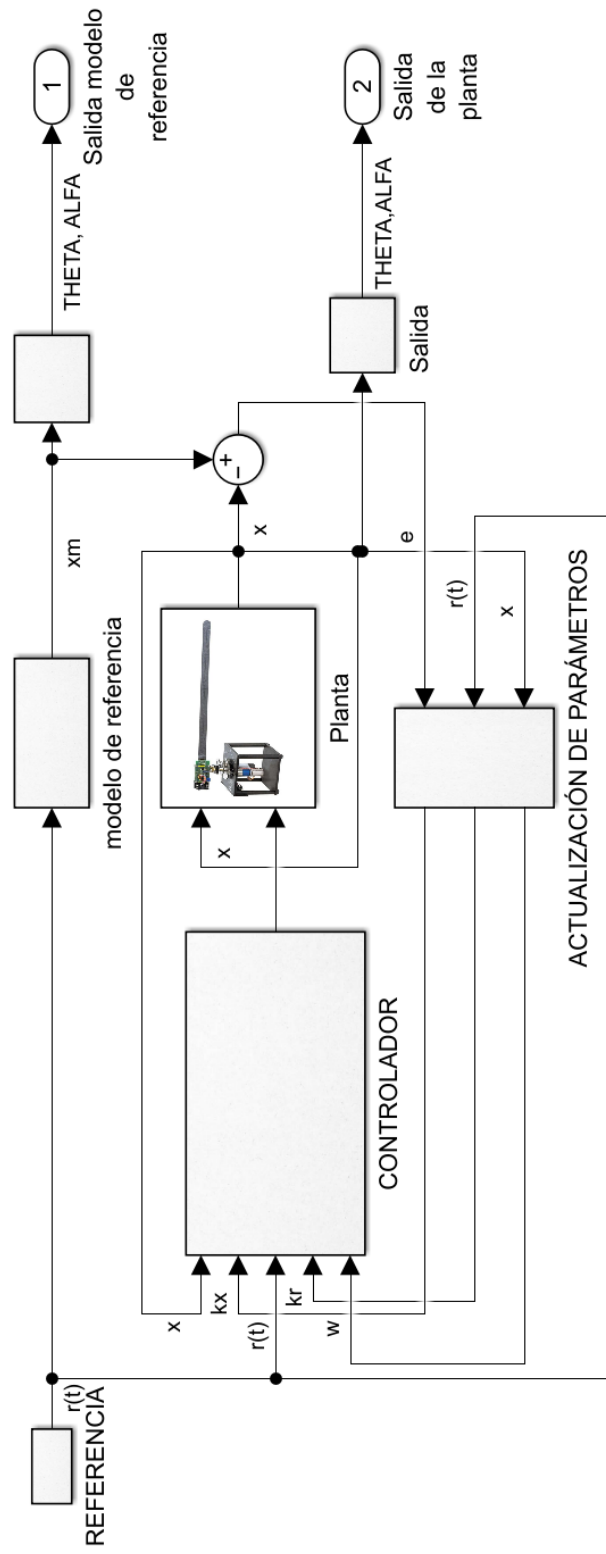


Figura 4: Implementación del controlador adaptativo en el entorno de Simulink

En la figura 4 se tiene la implementación en simulink donde el bloque de subsistema (CONTROLADOR) se tiene el cálculo de la señal de control referente a la ecuación 55, también veáse en el anexo B para una mejor comprensión del cálculo en simulink. En el subsistema de (planta) se tiene el cálculo de las matrices con respecto a las ecuaciones 43, 45,46, como ya se realizó el cálculo en MATLAB®, lo único que se hace es hacer el llamado de las matrices de estado A,B,C,D, para facilitar el procedimiento.

En el bloque de estados de (modelo de referencia) se tienen las matrices de estados de la ecuaciones 48, 49, donde las matrices C_m y D_m son las mismas de las matrices de la planta, y también son llamadas directamente desde el workspace hacia matlab.

En el bloque del subsistema (ACTUALIZACIÓN DE PARÁMETROS) se tiene los cálculos de k_x , k_r , w que son las ganancias adaptativas descritas en la ecuación 59, 60, 61, donde se harán el cálculo de la actualización de los parámetros aumentando el valor de robustez durante la simulación, vease en el anexo C para una mejor comprensión en la utilización del cálculo.

En las salidas de los sistemas se hace la multiplicación utilizando la matriz C para las salidas de la planta, y la matriz C_m para la salida del modelo de referencia.

3. Resultados

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos de la implementación del controlador adaptativo aplicado al sistema experimental del eslabón flexible. El objetivo principal es observar como influye el controlador en el comportamiento dinámico de las variables θ (theta) y α (alfa), tanto en términos de seguimiento de referencia como de estabilidad del sistema.

Se realizará un análisis comparativo de distintas configuraciones del controlador, incluyendo la actualización de parámetros y la actualización de estos mediante el término adicional σ . Se analizará el desempeño de cada configuración mediante las gráficas obtenidas, evaluando cómo se adaptan las salidas del sistema a la señal de referencia y cuán eficazmente consiguen disminuir el error de seguimiento.

Asimismo, se examinará cómo actúa la señal de control producida por cada estrategia y cómo ayuda a estabilizar el sistema frente a potenciales alteraciones. Este análisis ayudará a identificar cuál de las configuraciones proporciona un rendimiento más sólido y eficaz cuando se presentan variaciones en el sistema, enfatizando así la eficacia del enfoque adaptativo.

3.1. Requerimientos del sistema de control

El desarrollo del controlador adaptativo por modelo de referencia directo se planteó a partir de ciertos requerimientos que garantizan un desempeño adecuado del sistema rotatorio de un eslabón flexible. Estos lineamientos permitieron definir los objetivos de funcionamiento del sistema y establecer los criterios mínimos de desempeño en la simulación. A continuación, se detallan los principales requerimientos considerados durante el diseño y la evaluación del controlador:

- **Control de la flexión del eslabón:** La variable α , la cual simboliza la flexión del brazo, tiene que mantenerse en un margen $[-0.5 - 0.5]$ grados.
- **Tiempo de establecimiento:** La respuesta del sistema debe de estabilizarse en un tiempo menor a 10 segundos.
- **Sobreimpulso:** La salida θ no debe superar el 7% del valor de referencia durante el régimen transitorio.

Se verificó el cumplimiento de estos requisitos a través de simulaciones en lazo cerrado, en las que se compararon las respuestas con y sin el uso del término de robustez σ . Esto hizo posible observar mejoras en la estabilidad y precisión del control.

3.2. Restricciones del sistema de control

Las condiciones y el alcance en que se desarrolló el sistema de control adaptativo están determinadas por las restricciones impuestas. Estas restricciones aseguran que la simulación sea coherente y posibilitan que los resultados logrados se analicen dentro de un marco controlado. Las restricciones fundamentales establecidas para la investigación son las siguientes:

- **Modelo dinámico:** El modelo matemático describe el comportamiento de un sistema rotatorio con un eslabón flexible, en el que solo se tienen en cuenta las variables θ (posición angular) y α (deflexión del brazo), excluyendo efectos de fricción, no linealidades y cargas externas.
- **Situación de simulación:** El análisis se realizó completamente en un entorno simulado, sin que existiera una implementación física o en tiempo real.
- **Clase de referencias empleadas:** Para analizar el rendimiento del controlador, se usaron señales de tipo escalón y escalón múltiple.
- **Tiempo de muestreo:** Se ejecutarán las simulaciones utilizando un tiempo de muestreo de $T_s = 0,001$ s.

Estas condiciones definen el alcance de aplicación del sistema de control sugerido y establezca los fundamentos para la interpretación de los resultados experimentales que se muestran en las secciones siguientes.

3.3. Sistema en lazo abierto

Es fundamental entender el comportamiento natural del sistema, o sea, en lazo abierto, antes de implementar cualquier técnica de control. El propósito de esta fase es determinar cuán sensible o inestable es el sistema ante diferentes señales de entrada, analizando la respuesta θ y α .

Para ello, se aplicó una señal de entrada escalonada con diferentes niveles a lo largo de 15 segundos, con el propósito de generar diversos escenarios y analizar cómo varía la respuesta del sistema frente a diferentes cambios de entrada. Tal como se muestra en la figura 5 tenemos la señal de voltaje aplicado al sistema rotatorio con eslabón flexible, en la figura 6, se tiene la posición del eje rotatorio θ incrementa progresivamente ante una señal positiva y decremente ante una señal negativa, mientras que en la figura 7 se tiene la variable α , presentando oscilaciones significativas altas, ante estos cambios. Esto es esperable, ya que no se cuenta con un mecanismo que limite, corrija o estabilice la salida.

En este caso se evidencia que, al no haber retroalimentación, el sistema tiende a acumular errores y amplifica los efectos de la entrada. Este comportamiento resalta la necesidad de implementar un controlador que regule la dinámica y evite el crecimiento descontrolado de θ o las oscilaciones excesivas de α .

La simulación ofrece una visión clara del sistema mostrando el comportamiento oscilatorio y potencialmente inestable si no se aplica un control adecuado. Además, los datos obtenidos en esta fase resultan útiles para construir técnicas de controlador, como en este caso el control adaptativo.

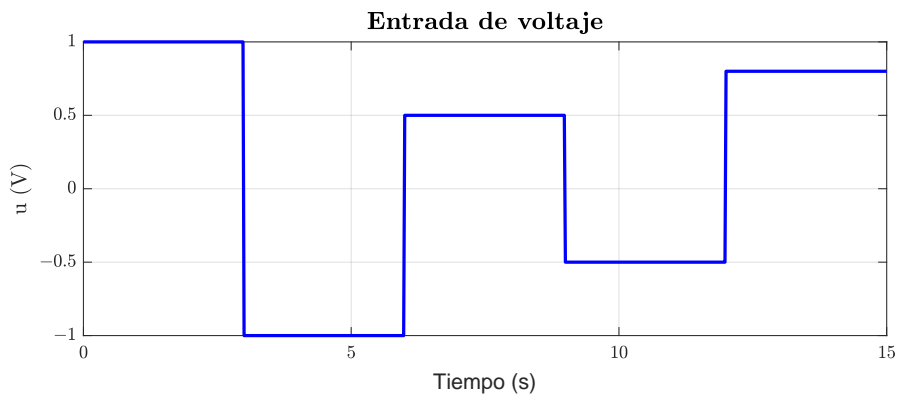


Figura 5: Señal de voltaje

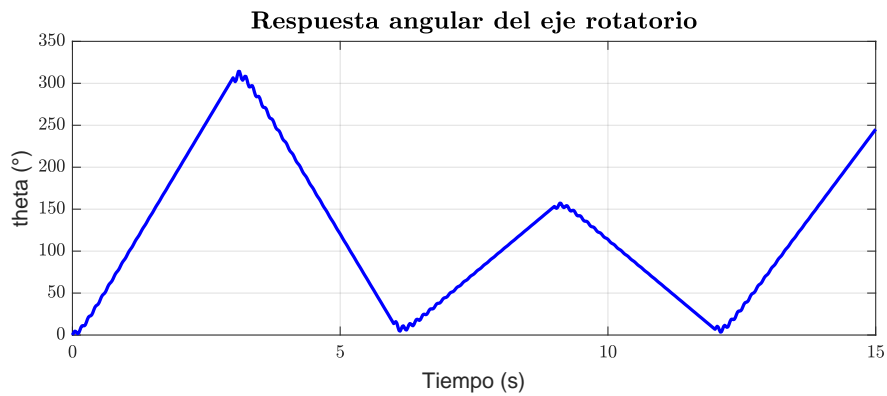


Figura 6: Salida de theta

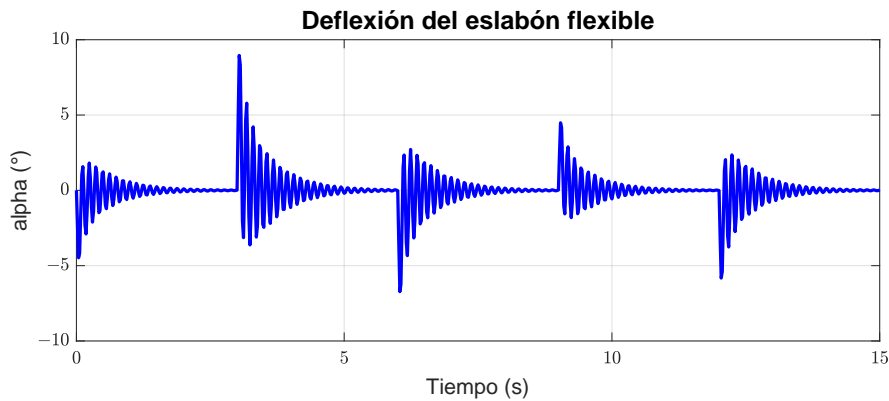


Figura 7: Salida de alfa

3.4. MRAC con actualización de parámetros

A continuación, se explicará detalladamente como se comporta el sistema al aplicar el control adaptativo utilizando la actualización de parámetros sin incluir el término de robustez, representado por el valor de sigma σ . Se analizarán las respuestas dinámicas del sistema ante una señal de referencia, observando la evolución temporal de las variables θ y α , así como la capacidad del controlador para lograr el seguimiento deseado. Así mismo, se evaluará la estabilidad del sistema y la efectividad del ajuste de los parámetros adaptativos, con el objetivo de identificar posibles limitaciones o ventajas de este enfoque sin el uso del término de robustez.

3.4.1. Respuesta ante una señal tipo escalón

En la figura 8 y 9 muestra los resultados obtenidos al aplicar el control adaptativo con modelo de referencia directo sin aumentarle el valor sigma de robustez, aplicado a un sistema de eslabón flexible. La gráfica 8 muestra la evolución que tiene la salida θ .

Se puede observar que la salida de la planta (línea azul) muestra una rápida respuesta con respecto al modelo de referencia (línea roja), permitiendo un seguimiento adecuado a la señal de entrada (línea punteada negra), pero como se puede notar la planta tiene unas pequeñas oscilaciones por el motivo de que se utiliza la actualización de parámetros simples, pero a pesar de eso su estabilización es muy rápida.

En la figura 9 muestra la salida de α dando a notar que tiene un cierto grado de oscilación pequeño pero razonable en la respuesta del sistema, solo al momento de llegar a la referencia existe una oscilación pero rápidamente se estabiliza, sin presentar nuevas oscilaciones significativas mediante el tiempo de simulación.

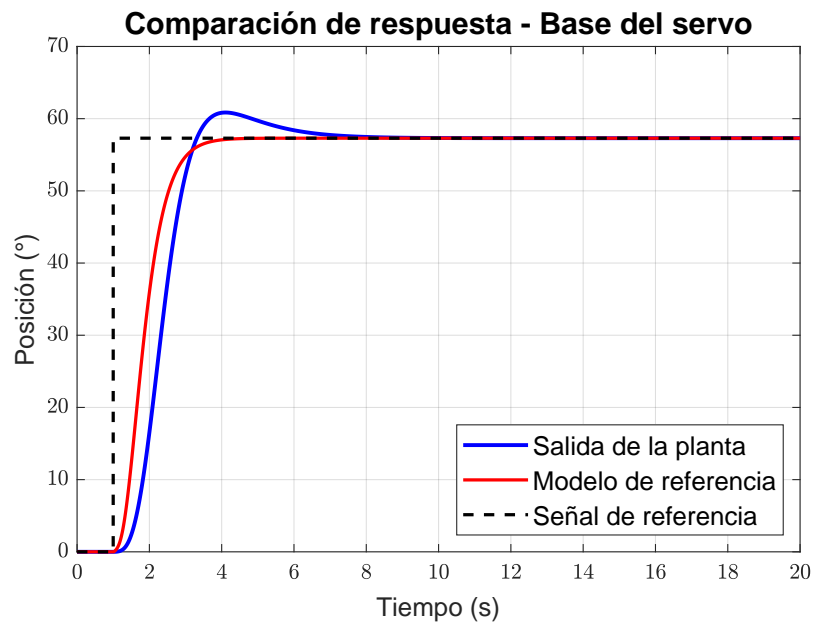


Figura 8: Respuesta de la base ante una señal tipo escalón

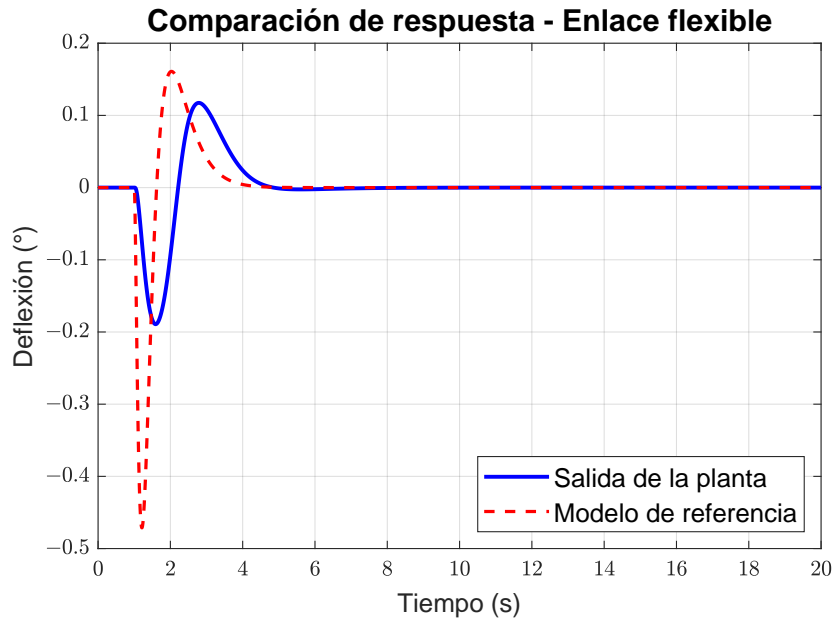


Figura 9: Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón

3.4.2. Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple

La Figura 10 muestra una señal de referencia tipo escalón múltiple o secuencia de escalones, con las siguientes características:

- Inicia en 0 grados hasta $t = 1$ s.
- Primer escalón aproximadamente a 56 grados desde $t = 1$ s hasta $t = 5$ s.
- Segundo escalón aproximadamente a 85 grados desde $t = 5$ s hasta $t = 10$ s.
- Tercer escalón a 0 grados desde $t = 10$ s hasta $t = 15$ s.
- Cuarto escalón aproximadamente a 56 grados desde $t = 15$ s hasta el final de la simulación $t = 20$ s.

Esta serie de escalones fue creada para analizar el rendimiento del controlador MRAC ante distintas magnitudes y orientaciones (aumentos y disminuciones) en la posición angular deseada (θ). La respuesta transitoria del sistema se puede observar gracias a los cambios repentinos, mientras que los períodos intermedios de estos cambios permiten examinar la convergencia y estabilización del controlador adaptativo.

Esta configuración de prueba es particularmente útil para poder evaluar la capacidad de seguimiento del controlador, la robustez frente a cambios de referencia de diferentes magnitudes. En la figura 11 permite visualizar las oscilaciones del elemento flexible, permitiendo visualizar las oscilaciones que tiene la salida de (α), cuando el sistema busca la referencia la salida tiene unas pequeñas oscilaciones, pero dicha oscilación desaparece rápidamente demostrando la funcionalidad del controlador.

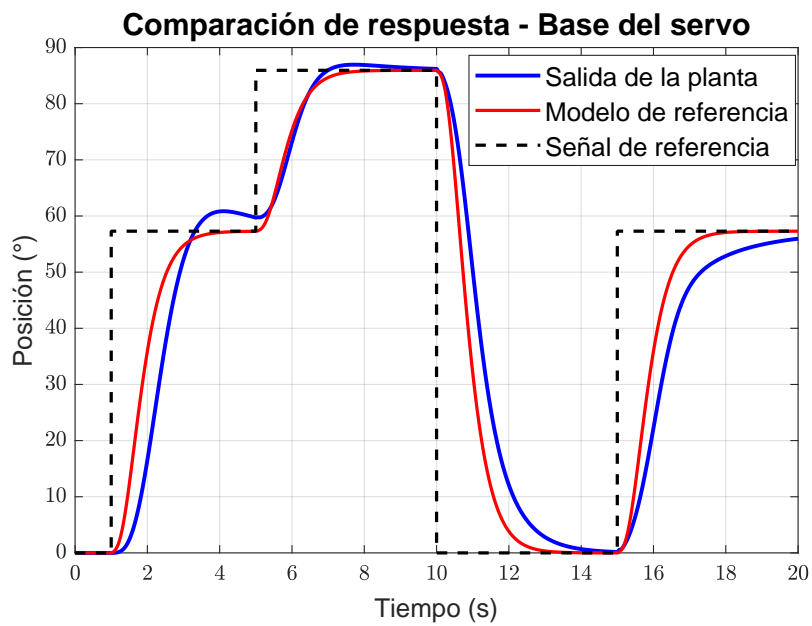


Figura 10: Respuesta de la base ante una señal tipo escalón múltiple

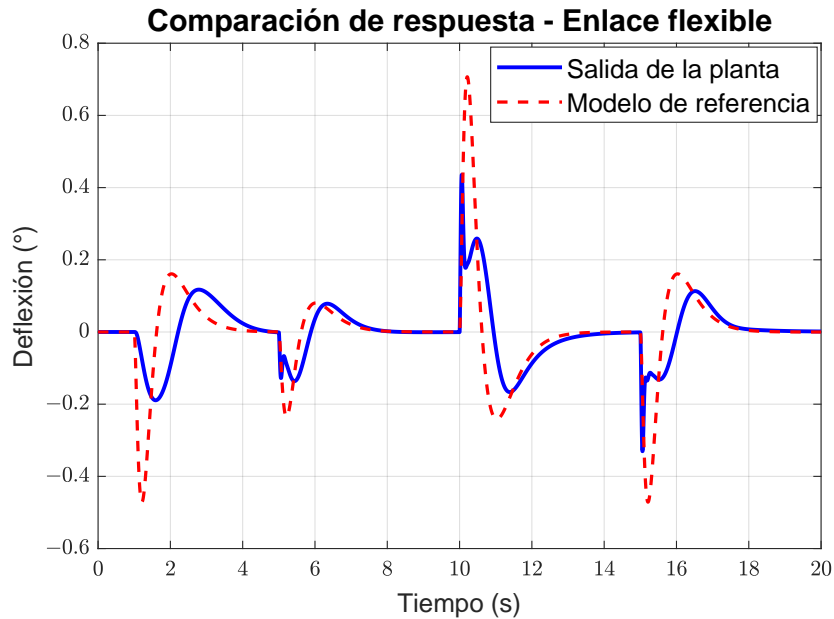


Figura 11: Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón múltiple

3.5. MRAC con actualización de parámetros con el elemento sigma σ

A continuación, se describe el comportamiento del sistema al aplicar el control adaptativo con la actualización de parámetros que incorpora el valor de robustez, representado por el término sigma σ . Esta implementación busca mejorar la estabilidad del sistema y mitigar las oscilaciones no deseadas al momento de seguir la señal de referencia. Se analizan las respuestas dinámicas de las variables θ y α , evaluando su desempeño frente al modelo de referencia y la señal de entrada. Así mismo, se examina la efectividad del ajuste adaptativo con la inclusión de σ y se comparan los resultados con el caso en el que este término no fue considerado, con el propósito de evidenciar las ventajas del enfoque robusto en el comportamiento general del sistema.

3.5.1. Respuesta ante una señal tipo escalón con sigma σ

La figura 12 muestra la respuesta de un sistema de eslabón flexible bajo control MRAC ante una entrada tipo escalón. En la gráfica se pueden ver la respuesta de posición:

- La línea roja representa la señal del modelo de referencia.
- La línea azul continua muestra la respuesta real del sistema.

- La línea punteada negra es la señal de entrada de referencia del sistema que cambia bruscamente de 0 a 56 grados aproximadamente en $t=1s$.

En la gráfica se puede visualizar como el sistema real (azul) sigue significativamente mejor la referencia, en este caso hace que el sistema responda mas lento pero sin tener un sobrepico, asegurando que el sistema se estabilice sin tener oscilaciones muy bruscas, alcanzando así el valor deseado.

En la figura 13 se visualiza la oscilación del Elemento Flexible, muestra las oscilaciones de α en grados que experimenta el elemento flexible durante la transición.

Al inicio del movimiento (cerca de $t=1s$), se produce una oscilación menor a la que se obtuvo anteriormente en la actualización de parámetros normal, aumentando el valor de robustez, se ha logrado disminuir los grados de oscilación en α . Estas oscilaciones se amortiguan rápidamente y el sistema se estabiliza.

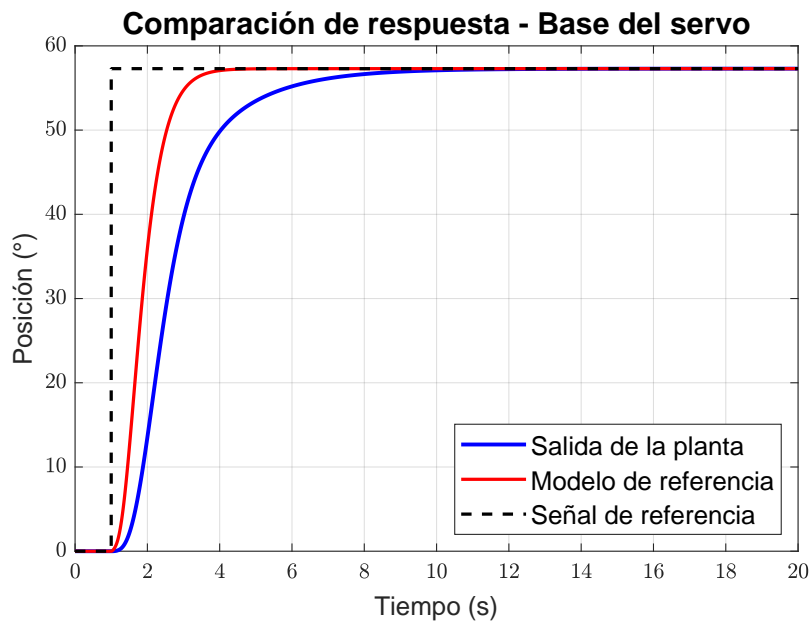


Figura 12: Respuesta de la base ante una señal tipo escalón

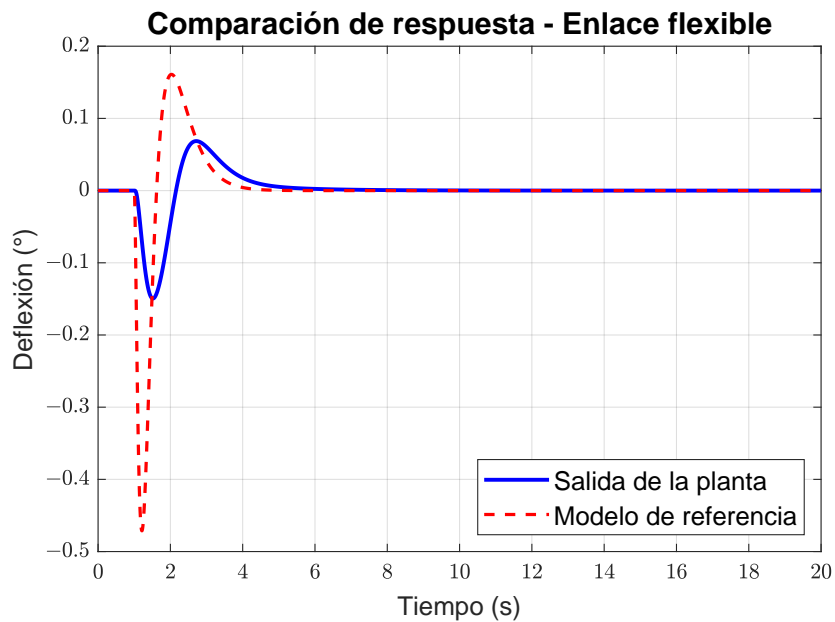


Figura 13: Respuesta del enlace flexible ante una señal tipo escalón

3.5.2. Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple con sigma σ

La figura 14 representa el comportamiento del mismo sistema, pero con una secuencia más compleja de cambios en la referencia, para poder evaluar el sistema ante múltiples variaciones en la entrada.

La gráfica, muestra la respuesta de posición. La señal de referencia (líneas punteadas negras) muestra cuatro cambios:

- Inicia en 0 grados hasta $t = 1$ s.
- Primer escalón aproximadamente a 56 grados desde $t = 1$ s hasta $t = 5$ s.
- Segundo escalón aproximadamente a 85 grados desde $t = 5$ s hasta $t = 10$ s.
- Tercer escalón a 0 grados desde $t = 10$ s hasta $t = 15$ s.
- Cuarto escalón aproximadamente a 56 grados desde $t = 15$ s hasta el final de la simulación $t = 20$ s.

Se puede visualizar que la respuesta del sistema real (azul) sigue estos cambios con cierto retraso pero sin tener sobreimpulsos, pero que muestra la eficiencia y la estabilidad del controlador ante múltiples variaciones en la entrada.

En la gráfica 15, muestra la oscilación del Elemento Flexible, donde se observan múltiples oscilaciones pero significativamente menores a lo que se obtuvo con la aplicación de la actualización de parámetros normales.

Cada cambio brusco en la referencia provoca oscilaciones en el elemento flexible, pero el controlador sigue mostrando la eficiencia en su respuesta porque tiende a estabilizarse rápido sin tener más oscilaciones hasta el otro punto de cambio en la referencia de entrada, porque las oscilaciones se amortiguan después de cada transición.

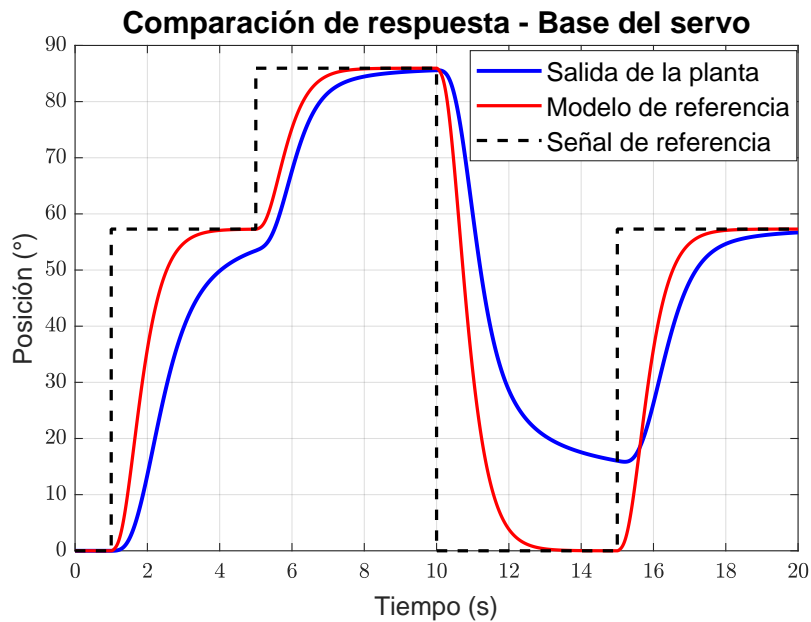


Figura 14: Respuesta ante una señal tipo escalón múltiple con sigma

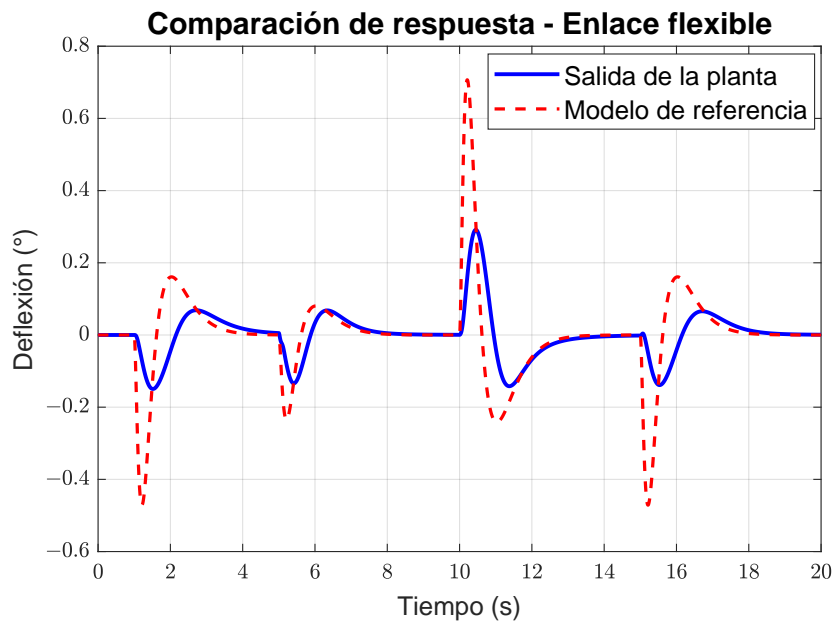


Figura 15: Enlace flexible ante una señal tipo escalón múltiple con sigma

3.5.3. Tablas comparativas de las salidas de Theta y Alpha

En esta sección se comparan los resultados obtenidos en la respuesta del sistema al aplicar el control adaptativo por modelo de referencia directo con dos configuraciones distintas: una sin incluir la robustez (σ) y otra con el valor de (σ). El propósito es analizar como influye este término en el comportamiento del sistema, observando aspectos como el seguimiento de la señal de referencia, la rapidez de respuesta y la estabilidad general. A partir de esta comparación, se busca identificar las ventajas que puede ofrecer el uso del parámetro de robustez frente a posibles variaciones o incertidumbres en el sistema.

Señal tipo escalón

En la tabla 4 se comparan la señal tipo escalón, con la actualización de parámetros tanto con el valor de sigma y sin sigma, y podemos notar que la señal que utiliza sigma efectivamente aumenta un poco la robustez del sistema.

Tabla 4: Cuadro comparativo de valores con sigma y sin sigma

Parámetro	Valor sin sigma	Valor con sigma
Sobreelongación $[\theta]$	6.21 %	0 %
Tiem.estabilización [s]	4.862	5.936
Valor final $[\circ]$	57.296	57.296
Rango de oscilación $[\alpha]$	$[-0,189 - 0,116]$	$[-0,154 - 0,066]$
Asent. máximo	60.852	57.296

Señal tipo escalón múltiple con sigma y sin sigma

En las tablas 5 y 6 se comparan los datos, y se demuestra que el que tiene más robustez es el que tiene el término de sigma, tienen algunos cambios en las salidas que ayudan positivamente a que el sistema sea estable.

Tabla 5: Valores para la señal tipo escalón múltiple sin sigma.

Escalón	1 seg	1.5 seg	0 seg	1 seg
Sobreelongación $[\theta]$	6.21 %	1.17%	0 %	0 %
Tiem.estabilización [s]	--	1.699	--	--
Valor final $[\circ]$	57.296	85.944	0	57.296
Rango de oscilación α	$[-0,189 - 0,116]$	$[-0,136 - 0,078]$	$[-0,17 - 0,436]$	$[-0,33 - 0,113]$
Asent. máximo	60.852	86.947	0.23889	55.959

Tabla 6: Valores para la señal tipo escalón múltiple con sigma.

Escalón	1 seg	1.5 seg	0 seg	1 seg
Sobreelongación $[\theta]$	0 %	0 %	0 %	0 %
Tiem.estabilización [s]	--	2.833	--	3.985
Valor final $[\circ]$	57.296	85.944	0	57.296
Rango de oscilación α	$[-0,154 - 0,066]$	$[-0,138 - 0,064]$	$[-0,141 - 0,283]$	$[-0,139 - 0,066]$
Asent. máximo	53.455	85.584	16.351	56.7

La robustez de un sistema de control hace referencia a la capacidad de mantener un rendimiento aceptable, ante errores de modelado o incertidumbres en los parámetros del sistema. En la simulación se introdujo el parámetro σ dentro de la ley de control adaptativo por modelo de referencia directo, con el objetivo de incrementar la robustez, porque actúa como un término de regularización en la actualización de los parámetros.

Al observar los resultados presentados en las tablas 4, 5 y 6, se aprecia que la inclusión del término σ mejora notablemente el comportamiento dinámico del sistema, especialmente en lo relacionado a la estabilidad y a la atenuación de oscilaciones no deseadas. Por ejemplo, en la señal tipo escalón, el rango de oscilación en α se reduce drásticamente al pasar de $[-0,189 - 0,116]$ sin σ a $[-0,154 - 0,066]$ con σ , lo cual evidencia una mayor capacidad del sistema para suprimir vibraciones inducidas por la flexibilidad estructural.

De manera similar, en el caso del escalón múltiple, se observan también mejoras en la estabilidad del sistema con σ , porque las variaciones en las respuestas del sistema son más suaves y se produce un asentamiento más uniforme de la salida θ . Se mejora la sobreelongación pasando de 6.21 % a 0 %, aunque el tiempo de estabilización aumenta, pero puede ser beneficioso en aplicaciones donde se prioriza la estabilidad en las partes flexibles.

La incorporación del término σ en el controlador MRAC muestra más robustez ante cambios bruscos en la referencia y posibles perturbaciones no modeladas, lo que posibilita que el sistema mantenga su rendimiento incluso bajo circunstancias difíciles. Esta cualidad es fundamental para sistemas reales, en las que las condiciones operativas pueden no ser del todo conocidas o estar expuestas a alteraciones inesperadas.

3.6. Estabilidad del controlador sin sigma - con sigma

En esta sección se analiza el comportamiento del sistema de control adaptativo por modelo de referencia directo ante la presencia de una perturbación externa, con el objetivo de evaluar la capacidad que tiene para mantener la estabilidad y el seguimiento de la referencia.

La respuesta de la variable θ sin el término de robustez σ incluido se presenta en la Figura 16. En este caso, se introdujo una perturbación en el segundo 10. Se observa, que a pesar de las alteraciones, el sistema fue capaz de restablecer su estabilidad correctamente, mostrando un comportamiento dinámico estable.

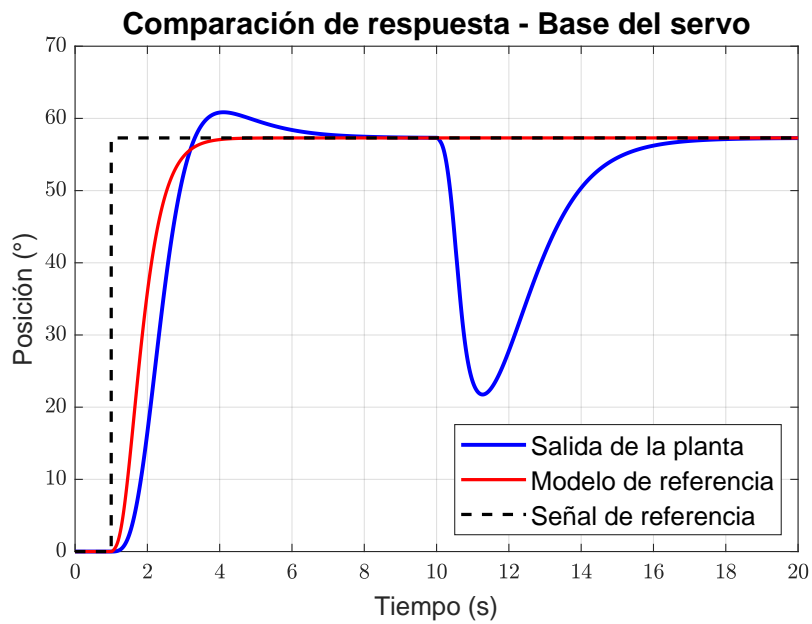


Figura 16: Respuesta de theta ante una perturbación

Por otro lado, en la Figura 17 se presenta la respuesta de la variable α , donde se aprecia que las oscilaciones generadas por la perturbación son progresivamente amortiguadas. Esto demuestra que el controlador posee la capacidad de reaccionar con rapidez y eficacia ante perturbaciones externas, manteniendo la estabilidad del sistema.

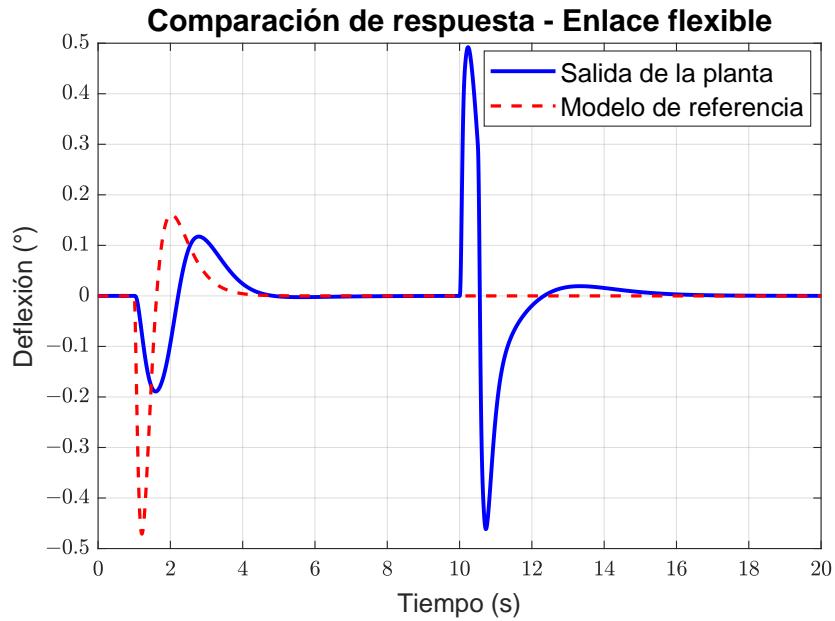


Figura 17: Respuesta de alfa ante una perturbación

En la Figura 18 se presenta la respuesta de la variable θ considerando el término de robustez σ . En este caso, también se aplicó una perturbación en el segundo 10, observándose una mejora notable en la respuesta del sistema. Gracias a la acción del término σ , ayudando a que el sistema recupere la estabilidad con mayor rapidez.

Asimismo, la Figura 19 muestra la respuesta de la variable α , en la que se observa que el término de robustez mejora la amortiguación de las oscilaciones. Esto muestra un avance en el trabajo del controlador, que consigue mantener la estabilidad y fortaleza del sistema frente a las perturbaciones externas.

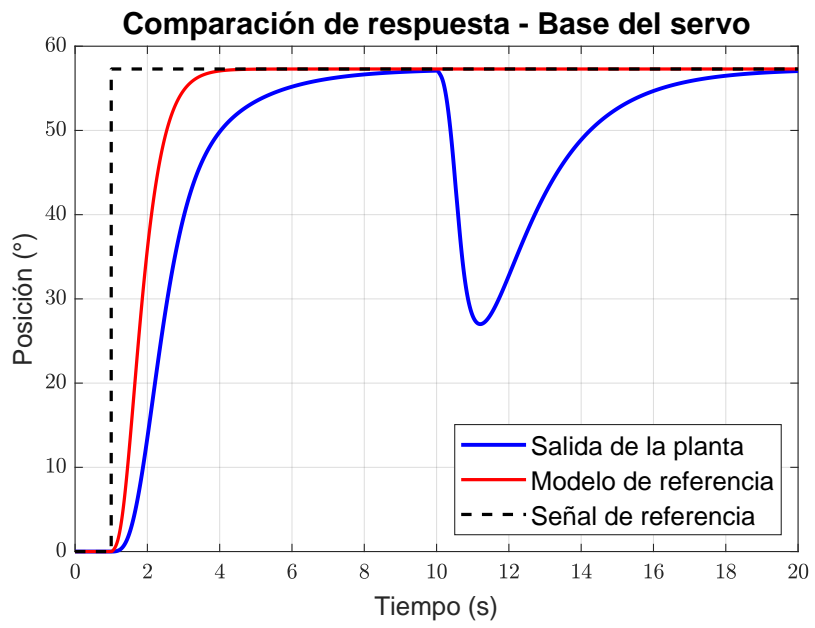


Figura 18: Respuesta de theta ante una perturbación con sigma

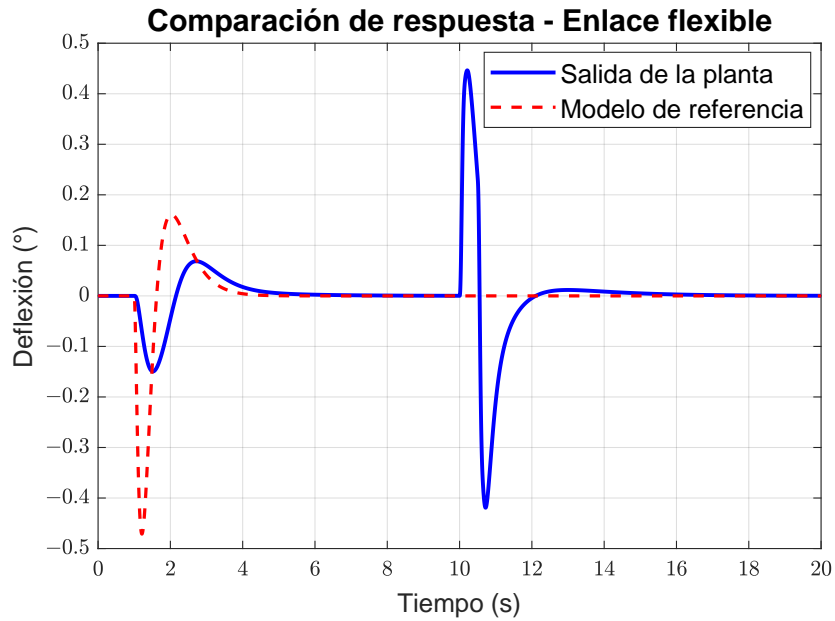


Figura 19: Respuesta de alfa ante una perturbación con sigma

Tabla 7: Cuadro comparativo de perturbación con sigma y sin sigma

Parámetro	Valor sin sigma	Valor con sigma
Sobreelongación [θ]	0 %	0 %
Tiem.estabilización [s]	7.6	9
Rango de oscilación [α]	$[-0,46 - 0,49]$	$[-0,42 - 0,45]$

En el cuadro 7 obtenemos los resultados que se obtuvieron en las figuras 16, 17, 18, 19 demostrando la robustez del sistema cuando se usa el término de sigma, aunque en el tiempo de estabilización con sigma se demora más tiempo, esto ayuda a que la parte flexible que es α tenga un rango de oscilación menor.

4. Conclusiones y recomendaciones

A continuación, se describe lo que se logró completar en este trabajo, así como algunas mejoras que podrían implementarse en futuras investigaciones. El objetivo es resaltar los avances alcanzados y dejar una base para quienes deseen continuar desarrollando esta propuesta.

4.1. Conclusiones

El desarrollo del trabajo permitió cumplir satisfactoriamente los objetivos planteados en el diseño y simulación de un sistema de control adaptativo por modelo de referencia directo (MRAC) aplicado a un sistema rotatorio con eslabón flexible. A través del modelado matemático, la implementación del controlador y la simulación en el entorno MATLAB–SIMULINK®R2022b, se logró demostrar la efectividad del método propuesto para optimizar el rendimiento dinámico y la estabilidad del sistema bajo distintas condiciones operativas.

En primer lugar, se consiguió realizar el modelado matemático del sistema rotatorio con flexibilidad en el eslabón, representando de forma precisa su comportamiento dinámico y las interacciones entre la posición angular del servo θ y la deflexión del eslabón α . Este resultado permitió establecer la base teórica necesaria para validar la acción del controlador adaptativo, cumpliendo así el primer objetivo específico del trabajo.

Se implementó un controlador adaptativo por modelo de referencia directo, que fue desarrollado a partir de las ecuaciones de Lyapunov e incorporando una ley para la actualización de parámetros, tanto con el término σ como sin él. Los resultados de la simulación demostraron que incluir ese término en el sistema mejoró su funcionamiento de manera significativa, disminuyendo el rango de oscilación de $[-0.189 - 0.116]$ sin el valor de σ y, aumentando la robustez del sistema; se obtuvo $[-0.154 - 0.066]$ de las variables de salida, así como la sobreelongación de 6.21 % que disminuyó a 0 % y el tiempo que tarda en estabilizarse, que primero fue de 4.862 segundos, pasó a 5.936 segundos. Esto permitió lograr el segundo objetivo específico, evidenciando que el parámetro de robustez ayuda significativamente a mejorar la estabilidad y exactitud del sistema frente a posibles alteraciones o perturbaciones.

La simulación del sistema rotatorio de un grado de libertad permitió comprender con mayor profundidad el efecto de la flexibilidad en el comportamiento dinámico, así como la importancia del control adaptativo en la compensación de dinámicas no lineales y parámetros variables. Los resultados obtenidos corroboran que el controlador MRAC responde adecuadamente ante señales tipo escalón, escalón múltiple y con perturbaciones externas,

alcanzando una respuesta más estable y precisa que el modelo sin control adaptativo. De esta manera, se cumplió el tercer objetivo específico del proyecto.

Finalmente, las simulaciones desarrolladas en MATLAB–SIMULINK® R2022b confirmaron que el diseño propuesto constituye una solución viable y eficiente para el control de sistemas rotatorios flexibles. Aunque el trabajo se realizó en un entorno simulado, los resultados obtenidos demostraron que el método MRAC con término de robustez σ mejora de forma notable la estabilidad y reduce las oscilaciones del eslabón flexible, alcanzando así el cumplimiento del cuarto objetivo específico y del propósito general del proyecto.

4.2. Recomendaciones

- Se recomienda realizar la implementación física del sistema, con el objetivo de poder validar empíricamente los resultados obtenidos en el trabajo, y así poder tener un mejor análisis en el comportamiento de la respuesta ante factores reales como ruidos, entre otros aspectos físicos que afectan a los sistemas.
- Se puede ampliar el estudio o el análisis realizando simulaciones adicionales con otros tipos de señales de entradas (rampa, senoidal, perturbaciones) permitirá profundizar su estudio ante diferentes señales y ver el desempeño del controlador.
- Para comprobar la estabilidad y la capacidad del controlador para adaptarse a los cambios en las condiciones de operación, se aconseja realizar un estudio de como actúa el sistema bajo distintas cargas. Esto posibilitaría una evaluación más completa de su rendimiento.
- A futuro se puede diseñar un control adaptativo más robusto, como lo es el uso de las redes neuronales, y poder comparar su desempeño utilizando los mismos criterios como la sobre elongación, tiempo estabilización, valor final y rango de oscilación.
- Se sugiere un análisis de sensibilidad más profundo en los parámetros de actualización, que permite examinar cómo los valores de Γ y σ afectan la respuesta del sistema. Esto posibilitaría definir criterios para diferentes contextos investigativos.
- Extender la aplicación del controlador a sistemas con múltiples grados de libertad para poder comprobar la versatilidad del diseño actual y la potencia que tiene el control ante aplicaciones más complejas .

Bibliografía

Referencias

- [1] A. Luca y W. Book, «*Robots with Flexible Elements*», en Springer Handbook of Robotics, pp. 287–319, 2008. Disponible en: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-32552-1_11 [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [2] V. Feliu Batlle, «*Robots flexibles: hacia una generación de robots con nuevas prestaciones*», Ciudad Real, España: Universidad de Castilla-La Mancha, 2006. Disponible en: <https://riunet.upv.es/server/api/core/bitstreams/ece8732c-2136-4683-b453-71fef910faa8/content> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [3] E. A. Alandoli, M. Z. A. Rashid, y M. Sulaiman, «*A COMPARISON OF PID AND LQR CONTROLLERS FOR POSITION TRACKING AND VIBRATION SUPPRESSION OF FLEXIBLE LINK MANIPULATOR*», Journal of Theoretical and Applied Information Technology, vol.95, no.13, 15-Jul-2017. [En línea]. Disponible: <https://www.jatit.org/volumes/Vol195No13/7Vol195No13.pdf> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [4] Francisco Rodríguez Rubio y Manuel Jesús López Sánchez, «*Control Adaptativo y Robusto*», Universidad de Sevilla, 1996. ISBN: 84-472-0319-0. Depósito Legal: SE-826-1996. Disponible en: <https://personal.us.es/rubio/ControlAdaptativoyRobusto.pdf> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [5] F. Qian, H. Ding, T. Liu, Z. Wu, X. Zhang y A. Iqbal, «*Un control de vibración activo adaptativo para sistemas de vigas flexibles bajo perturbaciones deterministas desconocidas*», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.228, art.n.112447, 2025. [En línea]. Disponible: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0888327025001487>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [6] Hafiz Muhammad Wahaj Aziz y Jamshed Iqbal, «*Flexible Joint Robotic Manipulator: Modeling and Design of Robust Control Law*», IEEE, 2016. ISBN: 978-1-5090-4059-9. Disponible en: <https://ieeexplore.ieee.org/abstract/document/7791230> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].

- [7] O. E. Ortiz, «*Estabilidad y límite parabólico de sistemas*», Argentina, 1996. Disponible en: <https://www.famaf.unc.edu.ar/documents/1067/DFis65.pdf> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [8] G. Airy, «*On the regulator of the clockwork for effecting uniform movement of equatorials*», *Memoirs of the Royal Astronomical Society*, vol. 11, 1840. Disponible en: <https://articles.adsabs.harvard.edu/pdf/1840MmRAS..11..249A> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [9] K. J. Astrom y R. M. Murray, «*Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*», Princeton, NJ: Princeton University Press, 2008. Disponible en: https://courses.grainger.illinois.edu/ece486/sp2025/documentation/lectures/slides_2014/lec01.pdf [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [10] A. A. Lazo Berrezueta, «*Implementación de un controlador adaptativo por modelo de referencia para sistemas de segundo orden*», 2016. Disponible en: <https://dspace.ups.edu.ec/bitstream/123456789/12718/1/UPS-CT006593.pdf> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [11] J. C. Sernaque Julca, «*Control adaptable de robots manipuladores*», Puebla, México, junio de 2022. Disponible en: <https://repositorioinstitucional.buap.mx/items/f15e551c-2a70-42a5-b2cb-8ff595c24c30> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [12] M. Aguilera, «*Control de robots con flexibilidad en el eslabón*», 1999. Disponible en: <https://cd.dgb.uanl.mx/handle/201504211/15996?locale-attribute=en> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [13] P. A. Ioannou y J. Sun, «*Robust Adaptive Control*», Prentice-Hall, 1996. Disponible en: <https://flyingv.ucsd.edu/krstic/teaching/282/ioannousun.pdf> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [14] L. Ljung y T. Glad, «*On Global identifiability for Arbitrary Model Parametrizations*» *Automatica*, vol. 30, no. 2, pp. 265-276, 1994. Disponible en: <https://sci-hub.se/https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0005109894900299?via%3Dihub> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [15] K. S. Narendra y K. Parthasarathy, «*Identification and control of dynamical systems using neural networks*», *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 1, no. 1, pp. 4–27, marzo 1990. Disponible en: <https://maxim>.

- ece.illinois.edu/teaching/fall20/final/Narendra90.pdf [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [16] R. S. Sutton, A. G. Barto y R. J. Williams, «*Reinforcement learning is direct adaptive optimal control*», IEEE Control Systems Magazine, vol. 12, no. 2, pp. 19–22, abril 1992. Disponible en: <https://blogs.cuit.columbia.edu/zp2130/files/2019/03/w01-ReinforcementLearning.pdf> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [17] P. Sihota, S. Yap, B. Schaefer y R. Wagstaff, «*Application of ACQUIRETM, an automated knowledge acquisition system, to industrial maintenance and maintenance*», Acquired Intelligence Inc. y MacMillan Bloedel Research Ltd., 1992. Disponible en: <https://sci-hub.se/https://ieeexplore.ieee.org/document/160801> [Último acceso: 4 de agosto de 2025].
- [18] K. Ackerman et al., «*Recovery of Desired Flying Characteristics with an L1 Adaptive Control Law: Flight Test Results on Calspan's VSS Learjet*», *AIAA SciTech Forum*, 2019. [En línea]. Disponible: <https://sci-hub.se/https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/6.2019-1084>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [19] T. Yucelen, W. M. Haddad, J. A. Muse, *Improving transient performance of discrete-time model reference adaptive control architectures*, [En línea]. Disponible en: https://haddad.gatech.edu/journal/DT_MRAC.pdf [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [20] K. M. Dogan, T. Yucelen, W. M. Haddad, and J. A. Muse, *Improving transient performance of discrete-time model reference adaptive control architectures*, Disponible en: https://haddad.gatech.edu/journal/DT_MRAC.pdf, [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [21] I. M. Mehedi and M. H. M. Shah, «*Position Control of Rotary Flexible Joint System Using Adaptive Dynamic Inversion*», IEEJ Transactions, vol. 17, pp. 96–102, 2022. [En línea]. Disponible en: <https://sci-hub.se/https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/tee.23491>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [22] M. Ali y H. Mirinejad, «*Robust tracking control of flexible manipulators using hybrid backstepping/nonlinear reduced-order active disturbance rejection control*», vol. 149, pp. 229–236, junio 2024. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0019057824001812>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].

- [23] R. Zotovic-Stanisic, R. Pérez-Úbeda, y Á. Perles, «*Estudio comparativo de métodos para el control de robots con articulaciones flexibles*», *Machines*, vol. 13, no. 8, art. 299, 6 de agosto de 2024. Disponible en: <https://www.mdpi.com/2076-0825/13/8/299> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [24] R. Singiresu, «*Mechanical Vibrations*», 2007. [En línea]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/V-T-T-Nguyen/publication/273330566_Basic_Mechanical_Vibrations/links/54fecf170cf2741b69f164f2/Basic-Mechanical-Vibrations.pdf. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [25] MathWorks, «*¿Qué es el modelado matemático?*», [En línea]. Disponible en: <https://m3challenge.siam.org/what-is-math-modeling/> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [26] MathWorks, «*Modelado matemático: Primeros pasos y obtención de soluciones*», [En línea]. Disponible en: <https://m3challenge.siam.org/what-is-math-modeling/modeling-handbooks/> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [27] N.L.Gibson, «*Introduction to Mathematical Modeling*», [En línea]. Disponible en: <https://sites.science.oregonstate.edu/~gibsonn/Teaching/MTH323-010W19/Supplements/IntroToModel/IntroToMathModel.pdf>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [28] Lennart Ljung, «*System Identification Theory for the User Second Edition*», Upper Saddle River, NJ 07458. [En línea]. Disponible en: https://www.mit.bme.hu/system/files/oktatas/targyak/9132/Ljung_L_System_Identification_Theory_for_User-ed2.pdf. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [29] Rutgers, «*Lagrange's and Hamilton's Equations (derivación variacional)*», [En línea]. Disponible en: <https://www.physics.rutgers.edu/~shapiro/507/book3.pdf> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [30] D. Subedi, I. Tyapin y G. Hovland, «*Review on Modeling and Control of Flexible Link Manipulators*», vol. 41, no. 3, pp. 141–163, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.mic-journal.no/PDF/2020/MIC-2020-3-2.pdf>. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [31] ScienceDirect, «*Viga de Bernoulli*», Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/bernoulli-beam#:~:text=>

- Modelo%20de%20deformaci%C3%B3n%20de%20Euler%2DBernoulli&text=Esta%20representaci%C3%B3n%20de%20la%20deformaci%C3%B3n, que%20fue%20dise%C3%B1ada%20para%20modelar. [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [32] D. Jiménez Villalobos, J. C. Jáuregui Correa, A. Mendoza Pérez, J. Enríquez Zarate, A. J. Ochoa Gordillo, J. R. Nuricumbo Morales, *Modelado matemático de una viga en voladizo por la ecuación de Euler-Bernoulli*, 23 al 25 de septiembre, 2009, Cd. Obregón, Sonora, México. [En línea]. Disponible en: <https://es.scribd.com/doc/289160044/Modelado-de-La-Viga-Tipo-Euler-Bernoulli> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [33] Pradhan, K. K. y Chakraverty, S., «*Overview of functionally graded materials*», Disponible en: <https://sci-hub.se/https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/B9780128154922000071> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [34] Cedillo Arenas, T., *Análisis dinámico de un mecanismo flexible por elementos finitos*, Ciudad Universitaria, Ciudad de México, 2016. Disponible en: <http://www.ptolomeo.unam.mx:8080/jspui/bitstream/132.248.52.100/10555/1/Tesis.pdf> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [35] «**PRINCIPIO DE HAMILTON. MECÁNICA**». Disponible en: <http://www.fisicafundamental.net/simetrias/hamilton.html> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [36] «**Hamilton's Principle of Stationary Action**», LibreTexts (Variational Principles in Classical Mechanics). Disponible en: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_\(Cline\)/09:_Hamilton%27s_Action_Principle/9.02:_Hamilton%27s_Principle_of_Stationary_Action](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/Classical_Mechanics/Variational_Principles_in_Classical_Mechanics_(Cline)/09:_Hamilton%27s_Action_Principle/9.02:_Hamilton%27s_Principle_of_Stationary_Action) [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [37] «**Hamilton's principle and Lagrange's equations**», en *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity* (capítulo de libro, ScienceDirect). Disponible en: <https://sci-hub.se/https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S1874705101800062> [Último acceso: 5 de agosto de 2025].
- [38] K. Ogata, «*Ingeniería de control moderna*», Quinta edición. [En línea]. Disponible en: <https://ingenierovizcaino.com/material/libros/>

- sd/ingenieria-de-control-moderna-ogata-5ed.pdf [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [39] K. J. Åström y R. M. Murray, «*Feedback Systems: An Introduction for Scientists and Engineers*», Segunda edición, versión v3.1.5, 24 de julio de 2020. [En línea]. Disponible en: https://www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM08/pdf/fbs-public_24Jul2020.pdf [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [40] D. Subedi, I. Tyapin y G. Hovland, «*Review on Modeling and Control of Flexible Link Manipulators*», *Modeling, Identification and Control*, vol. 41, no. 3, pp. 141–163, 2020. [En línea]. Disponible en: <https://www.mic-journal.no/PDF/2020/MIC-2020-3-2.pdf> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [41] M. I. Aguilera Hernández, «*Control de robots con flexibilidad en el eslabón*», febrero de 1999. [En línea]. Disponible en: <http://eprints.uanl.mx/5760/1/1020126752.PDF> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [42] P. Boscariol, L. Scalera y A. Gasparetto, «*Nonlinear Control of Multi-body Flexible Mechanisms: A Model-Free Approach*», *Appl. Sci.*, vol. 11, no. 3, 2021. [En línea]. Disponible en: <https://www.mdpi.com/2076-3417/11/3/1082> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [43] Dynamics, «*Moments of inertia*», Disponible en: <https://dynref.engr.illinois.edu/rem.html#:~:text=Rod%3A%20moments%20of%20inertia> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [44] OpenStax, «*Calcular momentos de inercia*», Disponible en: <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/10-5-calcular-momentos-de-inercia#:~:text=El%20teorema%20del%20eje%20paralelo,no%20derivamos%20en%20este%20texto.> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [45] OpenStax, «*Calcular momentos de inercia*», Disponible en: <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/10-5-calcular-momentos-de-inercia> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [46] Sorcia-Vázquez, F., «*Control de un brazo robot de eslabón flexible mediante PID generalizado y control sin modelo*», Universidad de Guadalajara, s.f. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/284062877_Control_de_un_brazo_robot_de_eslabon_

- flexible_mediante_PID_generalizado_y_control_sin_modelo
[Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [47] Hossian, A. A., Carabajal, R., Alveal, E. M. y Merlino, H., «*Análisis dinámico de un manipulador robótico industrial en base a la formulación de las ecuaciones de Lagrange. Un enfoque basado en los trabajos virtuales y las fuerzas generalizadas*», Madrid, España, 22–24 de noviembre de 2022. Disponible en: <https://oai.e-spacio.uned.es/server/api/core/bitstreams/f9339a3d-2ede-417a-ac6c-ab23a333899d/content> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [48] dademuchconnection, «*Función de transferencia del motor DC y su carga*», 24 de abril de 2019. Disponible en: <https://dademuchconnection.wordpress.com/2019/04/24/funcion-de-transferencia-del-motor-dc-y-su-carga/> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [49] C. A. Saldaña Enderica, J. R. Llata, and C. Torre-Ferrero, «*Optimization of Q and R Matrices with Genetic Algorithms to Reduce Oscillations in a Rotary Flexible Link System*» *Robotics*, vol. 13, no. 6, Article 84, 2024. Available: <https://www.mdpi.com/2218-6581/13/6/84>. DOI: 10.3390/robotics13060084.
- [50] Rubio, F. y López, M. J., «*Título del capítulo o documento*», 1996. Disponible en: <https://biblus.us.es/bibing/proyectos/abreproy/70451/fichero/CAPITULO+3.pdf#:~:text=Una%20definici%C3%B3n%20de%20utilidad%20ser%C3%ADa,Rubio%20%26%20L%C3%B3pez%2C%201996> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [51] SlideShare, «*Control Adaptativo con Modelo de Referencia (MRAS)*», Ing. Electromecánica, 2013. Disponible en: <https://es.slideshare.net/slideshow/control-adaptativo-con-modelo-de-referencia/1126447> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [52] H. Garcia, «*Análisis e implementación de un sistema de control adaptativo en tiempo real basado en microcomputador*», 1989. [En línea]. Disponible en: <https://www.tdx.cat/handle/10803/11141#page=1> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [53] Hernández Piedrahita, V., «*Modelamiento y simulación de un controlador adaptativo por modelo de referencia para un proceso de regulación de pH*», Cali, junio de 2013. Disponible en:

- <https://bibliotecadigital.univalle.edu.co/server/api/core/bitstreams/5e53ae62-7a8d-40c8-8324-c593f814bfc9/content>
[Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [54] Franco, R., Ríos, H. y Ferreira de Loza, A., «*Control adaptable usando modelo de referencia y modos deslizantes continuos*», ISSN: 2594-2492, Puebla, Puebla, México, 23–25 de octubre de 2019. Disponible en: <https://revistadigital.amca.mx/wp-content/uploads/2022/06/0012.pdf> [Último acceso: 13 de agosto de 2025].
- [55] Luz«*Frecuencia angular*», Disponible en: https://luz.izt.uam.mx/wikis/mediawiki/index.php/Frecuencia_angular [Último acceso: 13 de agosto de 2025].
- [56] Levine, W. S., «*Control System Advanced Methods*», Disponible en: https://api.pageplace.de/preview/DT0400.9781420073652_A23978485/preview-9781420073652_A23978485.pdf [Último acceso: 13 de agosto de 2025].
- [57] MathWorks, «*Model Reference Adaptive Control of Aircraft Undergoing Wing Rock*», Disponible en: <https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/model-reference-adaptive-control-of-aircraft-undergoing-wing-rock.html> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [58] Medina, M., Naranjo, M. y Rodríguez-Flores, J., «*Diseño de un controlador adaptativo por modelo de referencia usando la regla del MIT aplicado a un convertidor DC-DC reductor de voltaje*», Revista Politécnica, vol. 51, no. 1, Quito, feb.–abr. 2023. Disponible en: http://scielo.senescyt.gob.ec/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1390-01292023000100019#:~:text=Un%20controlador%20adaptativo%20indirecto%20estima,et%20al.%2C%202020 [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [59] Peña, M., «*Control adaptable*», 2011. Disponible en: https://www.academia.edu/31904838/CONTROL_ADAPTABLE [Último acceso: 6 de agosto de 2025].
- [60] MathWorks, «*Model Reference Adaptive Control*», Disponible en: <https://www.mathworks.com/help/slcontrol/ug/model-reference-adaptive-control.html> [Último acceso: 6 de agosto de 2025].

- [61] Wagner, D., Henrion, D. y Hrom, M., «*Measures and LMIs for Adaptive Control Validation*», 20 de mayo de 2020. Disponible en: <https://arxiv.org/pdf/2005.09313.pdf> [Último acceso: 13 de agosto de 2025].
- [62] Reed, S. y Steck, J. E., «*Adaptive Control for Fault Tolerant Autonomous Carrier Recovery*», Disponible en: <https://soar.wichita.edu/server/api/core/bitstreams/171578ee-b901-4ac2-997d-098b7705f10a/content> [Último acceso: 13 de agosto de 2025].
- [63] imepi, «*El futuro del control automático en la automatización industrial*», Disponible en: <https://imepi.com.mx/el-futuro-del-control-automatico-en-la-automatizacion-industrial/> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [64] BID, «*Somos el Banco Interamericano de Desarrollo*», Disponible en: <https://www.iadb.org/es/quienes-somos/acerca-del-bid#:~:text=Nuestra%20estrategia%20institucional%20describe%20c%C3%B3mo,los%20desaf%C3%ADos%20globales%20m%C3%A1s%20urgentes.> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [65] MathWorks, «*Getting Started with MATLAB. The MathWorks, Inc.*», 2023. Disponible en: <https://www.mathworks.com/help/matlab/getting-started-with-matlab.html> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [66] Attaway, S., «*MATLAB: A Practical Introduction to Programming and Problem Solving*», 6^a ed., Academic Press, 2022. Disponible en: [https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2018/elementos_calculo_numerico_M/Stormy%20Attaway-MATLAB%20%20A%20Practical%20Introduction%20to%20Programming%20and%20Problem%20Solving-Butterwonh-Heinemann%20\(2017\).pdf](https://cms.dm.uba.ar/academico/materias/2docuat2018/elementos_calculo_numerico_M/Stormy%20Attaway-MATLAB%20%20A%20Practical%20Introduction%20to%20Programming%20and%20Problem%20Solving-Butterwonh-Heinemann%20(2017).pdf) [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [67] Perutka, K., «*MATLAB for Engineers: Applications in Control, Electrical Engineering, IT and Robotics*», Disponible en: https://mlichouri.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/10/matlab_for_engineers_-_applications_in_control_electrical_engineering_it_and_robotics.pdf [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [68] Palm, W. J. «*Introduction to MATLAB for Engineers*», 4^a ed., McGraw-Hill Education, 2018. Disponible en: <https://www.cimat.mx/>

- ciencia_para_jovenes/bachillerato/libros/[Palm]MATLAB.pdf
[Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [69] Jumbo Sánchez, C. F. y Totoy Guananga, G. A., «*Diseño e implementación de un prototipo para el reconocimiento de sonido de disparos y solicitudes de ayuda que alertarán a un centro de operaciones remoto*», Guayaquil-Ecuador, 2016. Disponible en: <https://www.dspace.espol.edu.ec/xmlui/bitstream/handle/123456789/37181/D-CD105821.pdf?sequence=1&isAllowed=y> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [70] Electrónica, «*Entrevista a Juan Nasarre, director de MathWorks para España y Portugal*», 13 de enero de 2013. Disponible en: <https://www.redeweb.com/actualidad/imasd/entrevista-a-juan-nasarre-director-de-mathworks-para-espana-y-portugal/#:~:text=Actualmente%20hay%20m%C3%A1s%20de%20un,receptores%20son%20los%20departamentos%20de> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].
- [71] DesignTech, «*Simulink – Simulation and Modelling Tool*», Disponible en: <https://www.designtechproducts.com/articles/simulink-matlab#:~:text=,architecture%20and%20increasing%20simulation%20speed> [Último acceso: 7 de agosto de 2025].

Anexos

A. Código en MATLAB del Control Adaptativo Directo

```
1 % mrac_direct_controller.m
2 clear; close all; clc;
3
4 %% --- Planta (A,B,C,D) ---
5 L=0.45;
6 ml=0.0008;
7 Jlink=0.0042;
8 mb=0.05;
9 Jb=mb*L^2;
10 Jload=Jlink+Jb;
11 Jbase=0.002;
12 R=2.6;
13 Kg=70;
14 Kt=0.00767;
15 Kb=0.00767;
16 Km=0.00767;
17 fc=1.9;
18 Kstiff=(2*pi*fc)^2*Jload;
19
20 A=[0 0 1 0;
21     0 0 0 1;
22     0 Kstiff/(Jbase*L) -(Km*Kg)^2/(R*Jbase) 0;
23     0 -Kstiff*(Jload+Jbase)/(L*Jbase*Jload) (Km*Kg)^2/(R*Jbase)
24     ] 0];
25 B=[0;0;(Km*Kg)/(R*Jbase);-(Km*Kg)/(R*Jbase)];
26 C=[1 0 0 0; 0 1 0 0];
27 D=zeros(2,1);
28
29 %% --- Modelo de referencia (parecido a la planta) ---
30 wn = 2.3860; % wn_ref
31 Am = [0 0 1 0;
32        0 0 0 1;
33        -0.58*wn^2 -2.52*wn^2 -0.54*wn^2 5.74*wn^2;
34        0.58*wn^2 -22.26*wn^3 0.54*wn^2 -5.74*wn^2];
35 Bm = [0;0;0.58*wn^2;-0.58*wn^2];
36 Cm = [1 0 0 0; 0 1 0 0];
37 Dm = zeros(2,1);
38
39 %% --- GANANCIAS ADAPTATIVAS ---
40 Gamma_x = 0.04781766489;
41 Gamma_r = 0.03347236542;
```

```

42 Gamma_w = 0.02390883245;
43 %% --- Matriz P (para la ley adaptativa) ---
44 Q = eye(4);
45 P = lyap(Am',Q);
46 PB = P*B;
47
48 %% --- Simulacion MRAC ---
49 x0=zeros(4,1);
50 xm0=zeros(4,1);
51 Kx0=zeros(4,1);
52 Kr0=0;
53 w0=zeros(4,1);
54
55 t_final=20;
56 dt=0.001;
57 t=0:dt:t_final;
58 N=length(t);
59 r=zeros(1,N);
60 r(t>=1)=1;
61
62 x=zeros(4,N);
63 x(:,1)=x0;
64 xm=zeros(4,N);
65 xm(:,1)=xm0;
66 Kx=zeros(4,N);
67 Kx(:,1)=Kx0;
68 Kr=zeros(1,N);
69 Kr(1)=Kr0;
70 w=zeros(4,N);
71 w(:,1)=w0;
72 y=zeros(2,N);
73 ym=zeros(2,N);
74 u=zeros(1,N);
75 e=zeros(4,N);
76 u_max=50;
77 u_min=-50;
78
79 for k=1:N-1
80     xk=x(:,k); xmk=xm(:,k); rk=r(k);
81
82     e(:,k) = xmk - xk;
83
84     u_ad = w(:,k)'*xk;
85     u_raw = Kx(:,k)'*xk + Kr(k)*rk - u_ad;
86     u(k) = max(min(u_raw,u_max),u_min);
87
88     x(:,k+1) = xk + dt*(A*xk + B*u(k));
89     xm(:,k+1) = xmk + dt*(Am*xmk + Bm*rk);
90

```

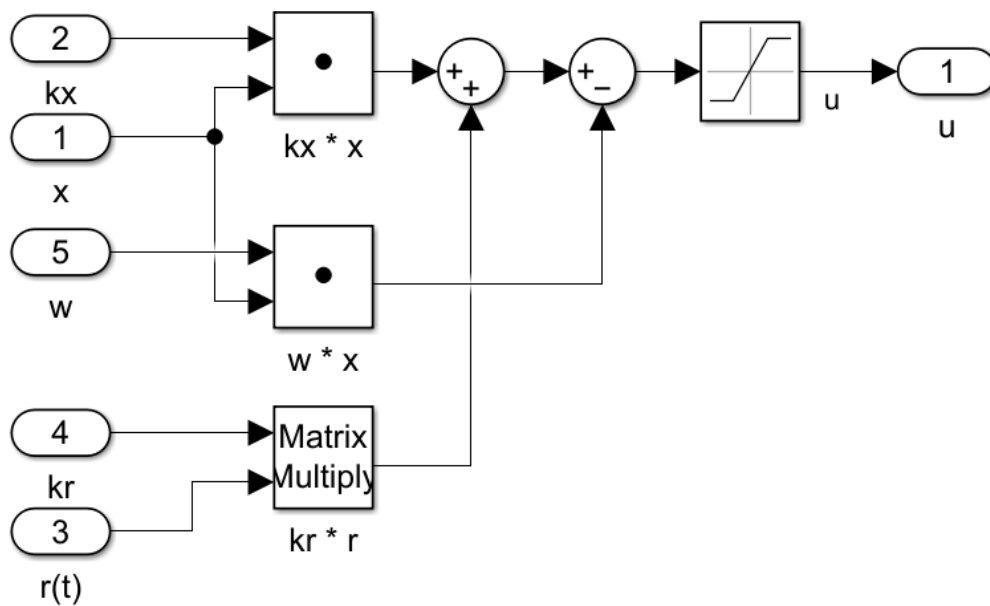
```

91  y(:,k) = C*xk;
92  ym(:,k) = Cm*xmk;
93
94  Kx(:,k+1) = Kx(:,k) + dt*( Gamma_x * ( xk * (e(:,k)')*PB)
    ) );
95  Kr(k+1) = Kr(k) + dt*( Gamma_r * ( rk * (e(:,k)')*PB)
    ) );
96  w(:,k+1) = w(:,k) + dt*( Gamma_w * ( xk * (e(:,k)')*PB)
    ) );
97  end
98  y(:,N)=C*x(:,N); ym(:,N)=Cm*xm(:,N);

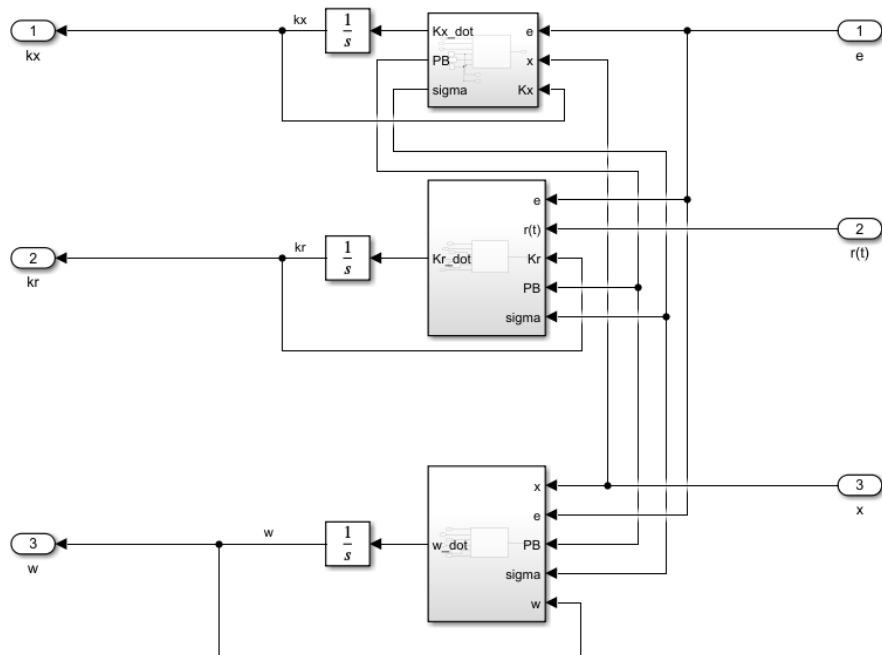
```

Listing 1: Código MATLAB del MRAC con sigma-modificación

B. Cálculo de control.



C. Cálculo de las ganancias adaptativas en SIMULINK.



Reporte de coincidencias

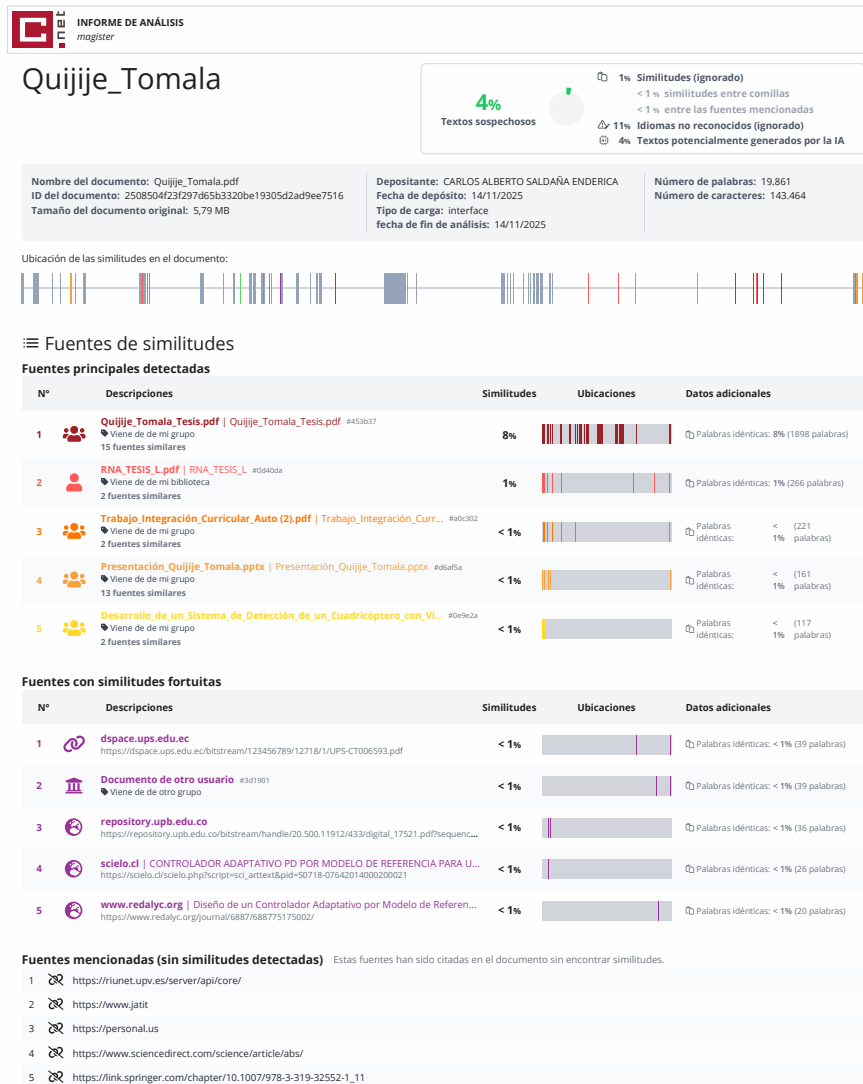


Figura 20: Reporte de compilation.