



UNIVERSIDAD ESTATAL PENÍNSULA DE SANTA ELENA
FACULTAD CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERÍA EN PETRÓLEO

TEMA:

**ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES
PRIMAL Y MIXTA PARA EL FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS
POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE
LOS ELEMENTOS FINITOS**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN PREVIO A LA
OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN PETRÓLEO**

AUTOR:

JHON KEVIN CAICEDO POTOSI

TUTOR:

ING. JOSÉ BALLARDO VILLEGAS SALABARRÍA, MSC.

LA LIBERTAD - ECUADOR

2020



**UNIVERSIDAD ESTATAL PENÍNSULA DE SANTA ELENA
FACULTAD CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
CARRERA DE INGENIERÍA EN PETRÓLEO**

TEMA:

**ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES
PRIMAL Y MIXTA PARA EL FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS
POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE
LOS ELEMENTOS FINITOS**

**PROYECTO DE INVESTIGACIÓN PREVIO A LA
OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN PETRÓLEO**

AUTOR:

JHON KEVIN CAICEDO POTOSI

TUTOR:

ING. JOSÉ BALLARDO VILLEGAS SALABARRÍA, MSC.

LA LIBERTAD - ECUADOR

2020

Dedicatoria

Este proyecto es dedicado principalmente a mi familia por su confianza y apoyo incondicional en estos años de duración de mi carrera, a mi padre por su apoyo infinito a lo largo de la vida, a mi madre por ser el pilar fundamental de mi familia, a mis hermanos porque son esperanza e inspiración, a mis abuelos por su sabiduría, fortaleza y conocimiento.

«It would not be much of a universe if it wasn't home to the people you love.»

-Stephen Hawking

Agradecimiento

Agradecido *infinitamente* con *mi familia Potosí-Benavides* por su apoyo durante mis estudios de pregrado en Ecuador

A mi tutor, *José Villegas* por sus conocimientos brindados durante la elaboración de este proyecto.

Al profesor, *Ricardo Gallegos* quien ha sido un guía, un amigo y por recomendarme en Repsol para la ejecución de mis prácticas preprofesionales en el Bloque 16.

A la doctora, *Gricelda Herrera* que me ha enseñado y ha contribuido en mi formación profesional durante la mitad de mi carrera.

A *mis profesores* quienes han contribuido con un poco de su conocimiento e información a lo largo de mi carrera.

A *mis amigos: Juan Perdomo, Luis Cárdenas y Jeferson Oviedo* por su amistad desde la secundaria; a *mis amigos: Carlos Mora y Diego Criollo* por su amistad y el compañerismo durante el preuniversitario y la carrera.

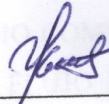
A *mis compañeros* con quienes compartí estos últimos años, no fui el mejor compañero, sin embargo espero que hayan aprendido algo de mí.

Por último, agradecido con un *gato de Schrödinger* a quien llamo *Darling Dani* porque es como un partícula la cual no puedo predecir su comportamiento, pero sí su posición en el tiempo.

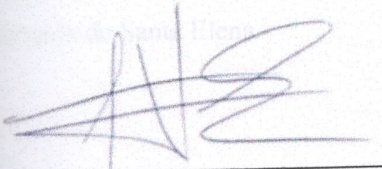
TRIBUNAL DE GRADO



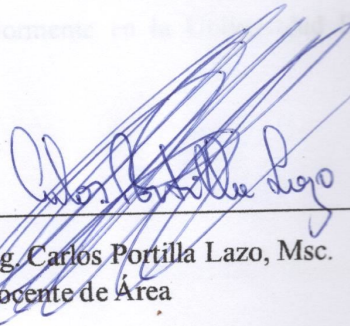
Ing. Juan Garcés Vargas, Msc.
Decano de la Facultad
Ciencias de la Ingeniería



Ing. Marllelis Gutiérrez Hinestroza, PhD
Directora (E) de Carrera
Ingeniería en Petróleos



Ing. José Villegas Salabarría, Msc.
Docente tutor de tesis

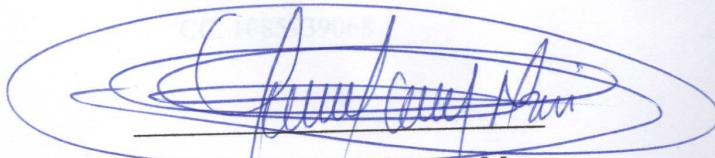


Ing. Carlos Portilla Lazo, Msc.
Docente de Área



Juan Kevin Caicedo Torres

18495134



Abg. Lidia Villamar Moran, Mgt.
Secretaria General

DECLARATORÍA DE AUTORÍA

El presente proyecto de investigación de título “ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES PRIMAL Y MIXTA PARA EL FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS” ha sido elaborado por JHON KEVIN CAICEDO POTOSI identificado con el pasaporte FB409134. En la investigación realizada se han citado a diferentes autores para la redacción científica de esta tesis de pregrado.

Declaro que este proyecto no ha sido realizado anteriormente en la Universidad Estatal Península de Santa Elena.

A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Jhon Kevin Caicedo Potosi', is centered on a light blue rectangular background.

Jhon Kevin Caicedo Potosi

FB409134

CC. 1085939068

APROBACIÓN DEL TUTOR

En mi calidad de tutor del proyecto de investigación “ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES PRIMAL Y MIXTA PARA EL FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS” elaborado por JHON KEVIN CAICEDO POTOSI, actualmente egresado de la carrera de Ingeniería en Petróleo, Facultad Ciencias de la Ingeniería de la Universidad Estatal Península de Santa Elena, previo a la obtención del título de ingeniero en petróleo, me permito declarar que luego de haber dirigido científicamente y técnicamente el desarrollo y la estructura final de este proyecto, este se ajusta a los estándares académicos y científicos, razón por la cual lo apruebo en todas sus partes.

De acuerdo con el Capítulo II, Artículos 11 al 19 del reglamento de graduación y titulación.



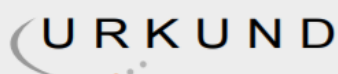
Ing. José Villegas Salabarría, MSc.

Docente tutor

CI. 0802495069

CERTIFICADO DE ANTIPLAGIO

En calidad de tutor del trabajo de investigación para titulación del tema “ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES PRIMAL Y MIXTA PARA FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS” elaborado por el estudiante JHON KEVIN CAICEDO POTOSI, egresado de la carrera de Ingeniería en Petróleos, de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería, me permito declarar que una vez analizado en el sistema antiplagio URKUND, luego de haber cumplido con los requerimientos exigidos de valoración, la presente tesis, se encuentra con un 2% de la valoración permitida.



Urkund Analysis Result

Analysed Document: finalthesis.pdf (D63123228)
Submitted: 1/28/2020 11:37:00 PM
Submitted By: jvillegas@upse.edu.ec
Significance: 2 %

Sources included in the report:

work10book.pdf (D24392676)



Ing. José Villegas Salabarría, MSc.

Docente tutor

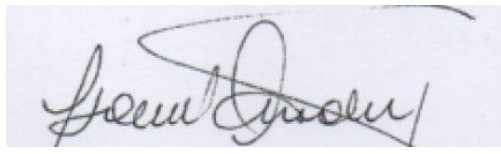
CI. 0802495069

CERTIFICO

Que, he revisado aspectos relacionados a la redacción, ortografía y sintaxis del trabajo de titulación, con el tema **“ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE LAS FORMULACIONES PRIMAL Y MIXTA PARA EL FLUJO BIFÁSICO EN MEDIOS POROSOS BIDIMENSIONALES APLICANDO EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS”**, elaborado por **JHON KEVIN CAICEDO POTOSI**, para optar por el Grado de INGENIERO EN PETRÓLEO, de la Facultad de Ciencias de la Ingeniería, Carrera Ingeniería en Petróleo de la Universidad Estatal Península de Santa Elena.

Autorizo hacer de este certificado, el uso legal que considere pertinente.

La Libertad, diciembre de 2019



Lic. Isabel Camacho Polo

Teléfono: 0994416753

e-mail: isabelacamacho@hotmail.com

Reg. Senescyt: 1023-11-1101534

Resumen

En simulación numérica de yacimientos es importante conocer las variables que gobiernan el flujo de fluidos como la presión y el flujo, los simuladores comerciales calculan estas variables con el método de las diferencias finitas, sin embargo en comparación entre el método de las diferencias finitas con el método de los métodos finitos es la precisión, este último es más preciso aunque requiere de mayor capacidad computacional, el método de las diferencias finitas calcula una constante en cada elemento, mientras que el método de los elementos finitos calcula las funciones de presión y flujo en cada elemento, reduciendo el margen de error significativamente. La formulación Primal matemáticamente es equivalente al funcionamiento de los simuladores convencionales porque resuelve la ecuación de la presión para luego obtener la solución del flujo por postprocesamiento, mientras que la formulación Mixta resuelve las ecuaciones del flujo y de la presión simultánea e iterativamente en un sistema de ecuaciones; el objetivo de este estudio es comparar dichas formulaciones utilizando la biblioteca de elementos finitos NeoPZ, con cuatro casos de estudio donde la permeabilidad absoluta en cada caso es altamente heterogénea. La metodología se basa en un sistema de pasos secuenciales: i) crear mallas geométricas usando gmsh, ii) convertirlas en mallas computacionales con algoritmos de NeoPz, iii) resolver las ecuaciones de presión y de flujo, iv) comparar los resultados. Con los resultados obtenidos se ha logrado identificar que el margen de error entre las dos formulaciones varía entre el 6 % y el 40 % siendo la más precisa la formulación mixta porque calcula las funciones de presión y flujo simultáneamente.

Palabras clave: Presión; Flujo bifásico; Formulaciones; Métodos de simulación, Yacimientos Petrolíferos.

Abstract

In numerical reservoir simulation it is important to know the variables that govern the flow of fluids such as pressure and flow, commercial simulators calculate these variables with the finite differences method, however in comparison between the finite differences method with the The finite method method is precision, the latter is more precise although it requires greater computational capacity, the finite difference method calculates a constant in each element, while the finite element method calculates the pressure and flow functions in each element, reducing the margin of error significantly. The Primal formulation mathematically is equivalent to the operation of conventional simulators because it solves the pressure equation and then flow equation is obtained by postprocessing , while the Mixed formulation solves the flow and pressure equations simultaneously and iteratively in a system of equations; The aim of this study is to compare these formulations using the NeoPZ finite element library, with four case studies where the absolute permeability in each case is highly heterogeneous. The methodology is based on a system of sequential steps: i) create geometric meshes using Gmsh, ii) convert them into computational meshes with NeoPz algorithms, iii) solve the pressure and flow equations, iv) compare the results. With the results obtained, it has been possible to identify that the margin of error between the two formulations varies between 6 % and 40 %, the mixed formulation being the most accurate because it calculates the pressure and flow functions simultaneously.

Keywords: Pressure; Two-phase flow; Formulations; Simulation methods; Petroleum Reservoirs.

Índice general

Portada	I
Dedicatoria	II
Agradecimiento	III
Resumen	IX
Abstract	X
Índice general	XI
Índice de figuras	XIV
Índice de tablas	XVI
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	3
1.2. Planteamiento del Problema	3
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo General	4
1.3.2. Objetivos Específicos	4
1.4. Justificación	4
1.5. Alcance de la Propuesta	5
1.6. Hipótesis	5
1.7. Variables	5
2. Revisión Bibliográfica	6
2.1. Ecuaciones Diferenciales para el Flujo de Fluidos	6
2.1.1. Medio poroso	6
2.2. Ley de Darcy	7
2.2.1. Flujo Monofásico	7
2.2.1.1. Flujo unidimensional monofásico y compresible	8
2.2.1.2. Flujo bidimensional-monofásico y compresible .	9
2.2.1.3. Flujo tridimensional-monofásico y compresible .	10
2.2.2. Operadores diferenciales	11
2.2.3. Ley Generalizada de Darcy para Flujo Monofásico	11
2.2.3.1. Condiciones de contorno	12

2.2.3.2.	Casos especiales para flujo monofásico	13
2.2.3.3.	Líquido ideal de compresibilidad constante	13
2.2.3.4.	Líquidos ligeramente compresibles	14
2.2.3.5.	Gas ideal	15
2.2.3.6.	Flujo incompresible	15
2.2.4.	Flujo Bifásico	16
2.2.4.1.	Ley de Darcy	17
2.2.4.2.	Conservación de cada fase	18
2.2.5.	Ecuaciones diferenciales para flujo bifásico	18
2.2.6.	Ecuaciones diferenciales alternativas para flujo bifásico	19
2.2.6.1.	Ecuación diferencial de la presión	19
2.2.6.2.	Caracterización de la ecuación diferencial de la presión	20
2.2.6.3.	Velocidad total para el caso de fluido incompresible	21
2.2.6.4.	Ecuación diferencial de la saturación	21
2.2.6.5.	Ecuación de difusión-conducción	22
2.2.7.	Teoría de Buckley-Leverett	23
2.2.7.1.	Caso unidimensional	23
2.2.7.2.	Caso radial	25
2.2.8.	Flujo Trifásico	26
2.2.8.1.	Ecuación de Darcy	26
2.2.8.2.	Conservación de cada fase	27
2.2.9.	Ecuaciones diferenciales	27
2.2.9.1.	Flujo con cambio de fase - Modelo Composicional	27
2.2.9.2.	Modelo Black-Oil	30
2.3.	Método de los Elementos Finitos	33
2.3.1.	Aplicación del Método de los Elementos Finitos en Flujo de Fluidos Medios Porosos	36
2.3.2.	Método de Galerkin	37
2.3.2.1.	Construcción de elementos unidimensionales (1D)	38
2.3.2.2.	Construcción de elementos bidimensionales (2D)	41
2.3.2.3.	Refinación de mallas	45
2.4.	Formulaciones en Simulación Numérica de Yacimientos	46
2.4.1.	IMPES	47
2.4.2.	Fully Implicit	47
2.4.3.	Fully Explicit	48
2.5.	Marco Conceptual	48
3.	Casos de Estudio	51
3.1.	Metodología	51
3.1.1.	Generación de mallas	52
3.1.2.	NeoPZ	52
3.2.	Formulaciones Primal y Mixta	53
3.2.1.	Problema lineal	53
3.3.	Formulación Primal	53

3.4. Formulación Mixta	54
3.5. Problemas	54
3.5.1. Caso I	55
3.5.2. Caso II	60
3.5.3. Caso III	64
3.5.4. Caso IV	68
4. Conclusiones	73
5. Recomendaciones	74
Bibliografía	75

Índice de figuras

2.1.1. Medio poroso saturado con fluidos. (Bastian, 1999)	7
2.2.1. Yacimiento bidimensional, flujo en una dirección.	8
2.2.2. Yacimiento tridimensional, flujo en dos direcciones.	9
2.2.3. Yacimiento tridimensional, flujo en tres direcciones.	11
2.2.4. Curva típica de permeabilidades relativas.	17
2.2.5. Curva típica del flujo fraccional, F_w	24
2.2.6. Perfil de saturación vs desplazamiento.	25
2.2.7. Caso radial. (Villegas, 2016)	26
2.3.1. División del dominio en elementos finitos. (Villegas, 2016)	33
2.3.2. Proceso de simulación con MEF.	35
2.3.3. Elemento e con funciones λ_1, λ_2	38
2.3.4. Elemento e con funciones φ_1, φ_2	39
2.3.5. Elemento e con funciones base.	40
2.3.6. Solución analítica y solución MEF (3).	40
2.3.7. Solución analítica y solución MEF (10).	41
2.3.8. Partición de elementos finitos en dos dimensiones.	43
2.3.9. Funciones base en dos dimensiones. (Chen, 2006)	44
2.3.10. Refinamiento de malla uniforme. (Chen, 2006)	45
2.3.11. Refinamiento de malla no uniforme. (Chen, 2006)	46
2.3.12. Malla con elementos y nodos numerados. (Chen, 2006)	46
3.1.1. Diagrama de flujo metodológico. Fuente: Autor	51
3.1.2. Interfaz del generador de mallas Gmsh.	52
3.5.1. Malla geométrica del caso I.	55
3.5.2. Comportamiento de la presión para el caso I.	56
3.5.3. Comportamiento del flujo para el caso I.	57
3.5.4. Presión con la formulación mixta para el caso I.	57
3.5.5. Flujo con la formulación mixta para el caso I.	58
3.5.6. Comparación entre las curvas de presión.	59
3.5.7. Comparación entre las curvas de flujo.	60
3.5.8. Malla geométrica del caso II.	60
3.5.9. Solución de la presión con la formulación primal para el caso II.	61
3.5.10. Solución del flujo con la formulación primal para el caso II.	61
3.5.11. Solución de la presión con la formulación mixta para el caso II.	62
3.5.12. Solución del flujo con la formulación mixta para el caso II.	62
3.5.13. Comparación de las curvas de la presión.	63
3.5.14. Comparación de las curvas de flujo.	63

3.5.15.Malla geométrica del caso III.	64
3.5.16.Resultado de la presión con la formulación primal para el caso III.	65
3.5.17.Resultado del flujo formulación primal para el caso III.	65
3.5.18.Solución con la formulación mixta para el caso III.	66
3.5.19.Resultado de flujo con la formulación mixta para el caso III.	67
3.5.20.Comparación de las curvas de presión.	67
3.5.21.Comparación de las curvas de flujo.	68
3.5.22Malla geométrica del caso IV.	69
3.5.23.Solución de la presión con la formulación primal para el caso IV.	69
3.5.24.Solución del flujo con la formulación primal para el caso IV.	70
3.5.25.Solución de la presión con la formulación mixta para el caso IV.	70
3.5.26.Solución del flujo con la formulación mixta para el caso IV.	71
3.5.27.Comparación entre las curvas de presión para el caso IV.	71
3.5.28.Comparación de las curvas de flujo.	72

Índice de tablas

2.1. Caudales de acumulación de fases no mojante y mojante	18
2.2. Variables dependientes	28
2.3. Listado de relaciones	30
2.4. Problemas de física e ingeniería con ecuación diferencial.	34
2.5. Fenómenos físicos con su vector de rigidez y vector de carga.	34
2.6. Problemas con diferentes condiciones de contorno.	38
2.7. Símbolos y unidades en el sistema internacional.	50

Capítulo 1

Introducción

La *simulación numérica de yacimientos* es una herramienta que permite entre otras cosas, calcular el *volumen recuperable de petróleo y gas* contenidos en los yacimientos hidrocarburíferos, también ayuda a calcular *presiones, caudales, flujo, saturaciones* para la planeación de estrategias de producción y recuperar la mayor cantidad de hidrocarburos teniendo en cuenta *propiedades del yacimiento* como presión inicial, saturaciones inicial de agua y petróleo, movilidad, heterogeneidades de las rocas contenedoras de hidrocarburos como porosidad y permeabilidad absoluta. Y *propiedades de los fluidos* como viscosidad, permeabilidades relativas, movilidades. Para calcular el factor de recobro final y la producción acumulada de petróleo la simulación de yacimientos se basa en *Leyes Fundamentales de la Física* como la Ley de la Conservación de la Energía, Ley de la Conservación de la Masa, Ley de Conservación del Momento, y en *Leyes para el Flujo de Fluidos en Medios Porosos* como la Ley de Darcy. Cada una de estas leyes se establece por *Ecuaciones Diferenciales* que al solucionarlas se puede predecir el *comportamiento* de los fluidos en los yacimientos. Los simuladores comerciales utilizan el *Método de las Diferencias Finitas* (MDF) para la solución numérica de estas ecuaciones diferenciales, mientras que en la actualidad las ecuaciones diferenciales se resuelven por el *Método de los Elementos Finitos* (MEF), aunque existen otras alternativas para resolverlas, con este método se obtiene la función de las ecuaciones diferenciales lo que vuelven a este método más eficiente y preciso. El método de los elementos finitos utiliza las Aproximaciones de Galerkin para la solución a las ecuaciones diferenciales, razón por la cual se dan las Funciones Base y los Coeficientes Alpha se calculan para predecir el comportamiento de diferentes propiedades y la interacción roca-fluido. Tanto el método de las diferencias finitas y como el método de los elementos finitos son *técnicas numéricas* para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

La *formulación Primal* para el cálculo de la velocidad de Darcy en elementos finitos tiende a aumentar el margen de error porque primero se calcula la presión y el flujo se obtiene por postprocesamiento, esto hace que los cálculos no sean precisos después de la simulación, mientras que con la *formulación Mixta* se calcula la velocidad y la presión simultánea e iterativamente haciendo que los cálculos de la simulación tengan mayor precisión.

Dos principales características de los yacimientos hidrocarburíferos es la naturaleza de la roca y de los fluidos que esta contiene. Los yacimientos son normalmente heterogéneos, sus propiedades dependen de la configuración o set de bloques del medio poroso (matriz).

La naturaleza de los fluidos que están en los yacimientos de petróleo depende principalmente del estado del recobro de petróleo, en estados tempranos, el yacimiento contiene un fluido como gas o petróleo, en estos casos la presencia de agua se puede despreciar. La presión en esta etapa es elevada así que el fluido se produce por expansión natural. Esta etapa se refiere como *recuperación primaria*, termina cuando ocurre un equilibrio entre la presión del yacimiento y la atmosférica.

La *recuperación secundaria* se da cuando se inyecta agua al yacimiento por pozos inyectoros, el agua desplaza al petróleo hacia pozos productores, en esta etapa sí la presión del yacimiento es mayor a la presión de burbuja de la fase de petróleo, existe el *flujo bifásico e inmiscible*, siendo una fase el agua y la otra el petróleo, y sin transferencia de masa entre las fases.

Si la presión del yacimiento es menor a la presión de burbuja, entonces el petróleo libera al gas asociado lo que conlleva a una fase líquida y una gaseosa en equilibrio termodinámico, en este caso el flujo es de tipo de petróleo negro (black oil), la fase acuosa no intercambia masa con las otras fases, pero entre la fase líquida de petróleo y gaseosa existe el intercambio de masa. Cuando el petróleo es pesado y viscoso, el agua tiene mayor movilidad, es decir el caudal de agua se producirá mayormente en los pozos de producción.

La *recuperación terciaria* o mejorada consiste en inyectar materia que no está presente en los yacimientos de petróleo, existen muchas técnicas de recuperación mejorada de petróleo pero un objetivo principal es reducir la saturación residual de petróleo.

Esta tesis presenta cuatro capítulos: Capítulo 1 corresponde a la *Introducción* donde se describe de forma general los alcances de este proyecto. Capítulo 2 es *Revisión Bibliográfica* donde se explican las definiciones y ecuaciones utilizadas para la simulación de yacimientos. Capítulo 3 es *Casos de estudio* donde se explican los cuatro casos planteados para la comparación entre las formulaciones Primal y Mixta, y el Capítulo 4 corresponde a las *Conclusiones* obtenidas por este estudio comparativo.

1.1. Antecedentes

- Las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo multifásico en medios porosos son muy complejas de resolver analíticamente, los sistemas de ecuaciones diferenciales son resueltos numéricamente, esto involucra subdividir el yacimiento en grillas o geometrías de una, dos o hasta tres dimensiones (Peery & Herron, 1969).
- Para el cálculo del flujo bifásico en simulación de yacimientos la industria del petróleo ha utilizado Software Comercial como IMEX de CMG que calcula las ecuaciones diferenciales por el método de las diferencias finitas (Hadziavdic, 2015).
- Un modelo físico para describir los fenómenos de flujo en medios porosos con la formulación Presión Implícita-Saturación Explícita (IMPES) para flujo bifásico y trifásico, el cual resuelve la ecuación de la presión externamente se calcula la ecuación de la saturación, el resultado de la saturación se introduce en la ecuación de la presión iterativamente hasta llegar a la solución (Redondo, 2017).
- Se ha desarrollado una aproximación de Balance de Materia que se basa en la Ley de Conservación de la masa, esta aproximación tiene en cuenta la intrusión y el flujo de agua para el cálculo de la saturación de petróleo, con este método se determina las distribuciones de los fluidos y la presión puede ser calculada para cada saturación (Batycky & Thiele, 2018).
- Romero en 2016 presenta formulaciones Primal y Dual para solucionar el flujo de una manera más exacta y precisa, aplicando matemática a la Simulación Numérica de Yacimientos (Romero, 2016).

1.2. Planteamiento del Problema

La simulación de yacimientos se basa principalmente en leyes físicas y ecuaciones que gobiernan el comportamiento y la interacción roca-fluidos como la Conservación de la Masa, Conservación de la Energía, Ley de Darcy, ecuación de la presión y la ecuación de la saturación, estas leyes describen el flujo de fluidos a través de medios porosos (Rafiqul, et al. 2019). El problema es que gran parte de los simuladores de yacimientos resuelven las ecuaciones diferenciales con el método de las diferencias finitas (Islam, et al. 2016), resultando una constante en cada elemento de la malla con alto rendimiento computacional, pero con mayor error al calcular la presión y el flujo. Mientras que el método de los elementos finitos resuelve las ecuaciones diferenciales y como resultado se obtiene la función de la presión y el flujo en cada elemento haciendo que el margen de error disminuya notablemente, sin embargo, el rendimiento computacional es menor porque requiere de cálculos complejos en cada uno de los elementos (Chen, et al. 2006). Se propone solucionar el problema con el método de los elementos finitos implementando la formulación primal que

resuelve la ecuación de la presión y el resultado obtenido se postprocesa para obtener el flujo, esto tiende a aumentar el error en los cálculos de flujo y presión, e implementando la Formulación Mixta se calculan simultáneamente la ecuación del flujo y la ecuación de la presión en un sistema de ecuaciones (Romero, 2016).

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Implementar una Formulación Primal y una Mixta usando la biblioteca de elementos finitos Neopz para flujo bifásico en medios porosos bidimensionales.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Aplicar la Ley de la Conservación de la Masa y la Ley de Darcy para la predicción del comportamiento de los fluidos en el yacimiento.
- Asumir que los fluidos son inmiscibles.
- Calcular la presión como función del flujo en yacimientos bidimensionales y heterogéneos.

1.4. Justificación

Un simulador de yacimientos es una herramienta que nos permite saber el comportamiento de los fluidos a través del medio poroso principalmente para maximizar el factor de recobro y para la toma de decisiones. Los simuladores resuelven ecuaciones diferenciales que describen los procesos físicos en los yacimientos principalmente la presión, el transporte de fluidos, la saturación, la velocidad de Darcy, estos describen los procesos de flujo en medios porosos (Lie, 2019). Mientras que los simuladores convencionales utilizan el método de las diferencias finitas, el método de los volúmenes finitos o métodos combinados, el método de las diferencias finitas es el método más viejo para soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales y fue implementado por Euler (Hadziavdic, 2015). El método de los elementos finitos aplicado a la simulación de yacimientos no ha sido ampliamente utilizado, este método calcula por las aproximaciones de Galerkin (Durán, 2017), que soluciona las funciones base y los coeficientes Alpha para conocer las variables en cada elemento en la malla de simulación, resolviendo así las ecuaciones diferenciales que describen los procesos físicos activos en los yacimientos.

1.5. Alcance de la Propuesta

El propósito de este proyecto es implementar las formulaciones Primal y Mixta teniendo en cuenta los diferentes procesos físicos que ocurren en un yacimiento de petróleo, modelamiento bidimensional de flujo bifásico a través de medios porosos utilizando el método de los elementos finitos, comparar las formulaciones anteriormente mencionadas, identificar cuál es la más precisa, sin considerar los efectos de la presión capilar.

1.6. Hipótesis

Las formulaciones Primal y Mixta se podrían implementar para la simulación numérica de yacimientos de petróleo para yacimientos heterogéneos aumenta el tiempo computacional, la estabilidad y la consistencia con el método de los Elementos Finitos. La biblioteca NeoPz funciona apropiadamente para la simulación numérica de yacimientos porque soluciona problemas de estabilidad, consistencia y reduce el tiempo de procesamiento. Las ecuaciones diferenciales de presión y saturación están relacionadas para dar soluciones en simulación numérica de yacimientos.

1.7. Variables

Las principales variables en simulación numérica de yacimientos son la precisión de los resultados, teniendo en cuenta los procesos directos o indirectos que se han utilizado en el método de los elementos finitos, geometrías complejas, refinación de mallas, las condiciones de contorno. También propiedades del yacimiento como el volumen, la heterogeneidad, la energía inicial, la porosidad y la distribución de las saturaciones.

Capítulo 2

Revisión Bibliográfica

2.1. Ecuaciones Diferenciales para el Flujo de Fluidos

Los modelos en simulación de yacimientos pueden ser físicos como de laboratorio a escala como los que tienen algunas universidades o las compañías petroleras, o modelos matemáticos. Un modelo matemático de un sistema físico es un set de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) con apropiadas condiciones de contorno (Breitenbach et al, 1968), estas describen los procesos físicos que ocurren en los yacimientos de petróleo. Estos procesos son básicamente flujo de fluidos y transferencia de masa. En tres fases inmiscibles (agua, petróleo y gas) el flujo se da simultáneamente, mientras que la transferencia de masa sólo puede darse entre las fases petróleo y gas. Otros fenómenos como la gravedad, la capilaridad, y las fuerzas viscosas juegan un rol importante en los procesos de flujo de fluidos. Las ecuaciones modelo deben tener en cuenta todas esas fuerzas y también las descripciones arbitrarias del yacimiento con respecto a su heterogeneidad y geometría.

Las ecuaciones diferenciales son obtenidas combinando la Ley de Darcy para cada fase con un diferencial simple de la ecuación de Balance de Materia. Al usar las ecuaciones diferenciales para la predicción del comportamiento de un yacimiento, es necesario resolverlas teniendo en cuenta las condiciones de contorno. En el más simple de los casos involucra yacimientos homogéneos con condiciones regulares como contornos circulares, las soluciones para estos casos pueden ser obtenidas por métodos clásicos de física-matemática.

Los métodos numéricos con computadores de última tecnología obtienen soluciones rápidamente de situaciones y yacimientos complejos. Entonces un modelo numérico de un yacimiento es un programa de computadora que usa métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas del modelo matemático.

2.1.1. Medio poroso

Matemáticamente, un medio poroso es un conjunto del *Espacio Euclidiano* que tiene una, dos o tres dimensiones (Chen, 2006). Físicamente un medio poroso es un cuerpo compuesto por una parte sólida conocida como matriz y un espacio

vacío llamado espacio poroso, este puede estar saturado de gas, petróleo y agua (Villegas, 2016). En la figura 2.1.1 se puede observar un medio poroso saturado inicialmente sin saturación, posteriormente saturado con agua y con petróleo.

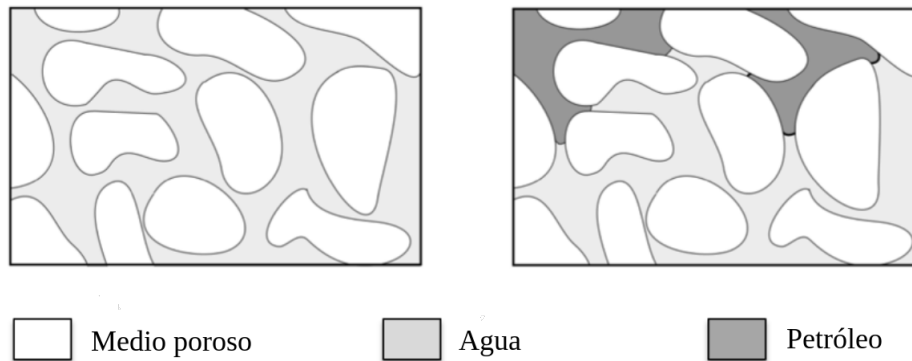


Figura 2.1.1: Medio poroso saturado con fluidos. (Bastian, 1999)

2.2. Ley de Darcy

Darcy en 1855, propuso matemáticamente la descripción del flujo del agua en medios porosos, su ecuación ha sido modificada para describir el flujo de uno o de múltiples fluidos en una dimensión, dos y tres dimensiones (Slattery, 1963). Henry D'Arcy, ingeniero francés que con experimentación descubrió que el caudal de agua inyectado era proporcional al gradiente de presión a través de medios porosos (Ewing, 1983).

2.2.1. Flujo Monofásico

La Ley de Darcy para flujo monofásico en un yacimiento lineal con un caudal Q , longitud L y una sección transversal A , se da por la siguiente ecuación:

$$Q = \frac{KA}{\mu} \left(\frac{\Delta p}{L} \right) \quad (2.2.1)$$

donde Δp es la caída de presión del yacimiento, μ es la viscosidad del fluido, K es la permeabilidad absoluta del medio. Para el flujo en una dirección, la ecuación de Darcy se puede escribir de la siguiente forma:

$$v = \frac{Q}{A} = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.2.2)$$

donde $v = \frac{Q}{A}$ es la velocidad del flujo, $\frac{\partial p}{\partial x}$ es el gradiente de presión en la dirección x . El símbolo negativo indica que la presión declina en dirección del flujo. Diferencialmente la Ley de Darcy también se puede escribir para tres dimensiones (x,y,z).

La anterior ecuación no toma en cuenta la gravedad, sin embargo se ha modificado para incluir este efecto así:

$$v_x = -\frac{K}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \frac{\partial D}{\partial x} \right) \quad (2.2.3)$$

donde ρ es la densidad del fluido y g es la aceleración dada por la gravedad, ∂D es un diferencial dado por la profundidad.

2.2.1.1. Flujo unidimensional monofásico y compresible

En derivación de una ecuación diferencial para el flujo en una dimensión, se ha incluido el área de sección transversal A , la profundidad D como funciones de una variable de espacio x . Se incluye un término para inyección de un fluido, q , que equivale al caudal másico de inyección por unidad de volumen de yacimiento. Finalmente, se reconoce la densidad del fluido cambiará como función del tiempo.

Considerando la Ley de Conservación de la Masa en un yacimiento lineal como se muestra en la siguiente figura. Este yacimiento tiene una longitud Δx , el área de sección transversal izquierda $A(x)$, el lado derecho tiene una área $A(x+\Delta x)$. El caudal de fluido que ingresa al yacimiento por el lado izquierdo se da por:

$$\rho(x) \cdot v_x(x) \cdot A(x) = (A\rho v_x)_x \quad (2.2.4)$$

El caudal de salida de flujo por el lado derecho es:

$$\rho(x + \Delta x) \cdot v_x(x + \Delta x) \cdot A(x + \Delta x) = (A\rho v_x)_{x+\Delta x} \quad (2.2.5)$$

El volumen del yacimiento es $\bar{A}\Delta x$, \bar{A} indica el valor promedio de A entre x y $x+\Delta x$. Entonces el caudal másico del fluido inyectado en el yacimiento es: $\bar{q}\bar{A}\Delta x$.

La masa contenida en el yacimiento es $\bar{\phi}\bar{\rho}\bar{A}\Delta x$, entonces el caudal de acumulación de masa en el yacimiento es:

$$\frac{\partial (\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t} \bar{A}\Delta x \quad (2.2.6)$$

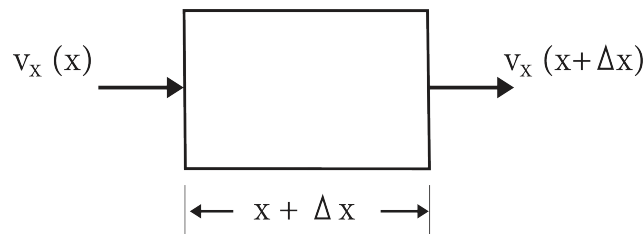


Figura 2.2.1: Yacimiento bidimensional, flujo en una dirección.

Como la masa debe ser conservada, se tiene que:

$$Q_{entra} - Q_{sale} + Q_{inyectado} = Q_{acumulado}$$

Entonces:

$$(A\rho v_x) - (A\rho v_x)_{x+\Delta x} + \bar{q}\bar{A}\Delta x = \bar{A}\frac{\partial(\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t}\Delta x \quad (2.2.7)$$

dividiendo para Δx da:

$$-\frac{(A\rho v_x)_{x+\Delta x} - (A\rho v_x)_x}{\Delta x} + \bar{q}\bar{A} = \bar{A}\frac{\partial(\bar{\phi}\bar{\rho})}{\partial t}$$

tomando en cuenta que Δx tiende a cero y el concepto de derivada parte de límite tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

y que $\bar{A} \rightarrow A(x)$, $\bar{\rho} \rightarrow \rho(x)$, entonces:

$$-\frac{\partial(A\rho v_x)}{\partial x} + Aq = A\frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.2.8)$$

2.2.1.2. Flujo bidimensional-monofásico y compresible

En flujo de dos dimensiones (x, y) , se encuentra la variación del espesor del yacimiento, $H = H(x, y)$. Consideramos ahora el balance de masa en un yacimiento pequeño (Kufahl & Greenkorn, 1968). La figura 2.2.2 tiene una longitud Δx y una altura Δy .

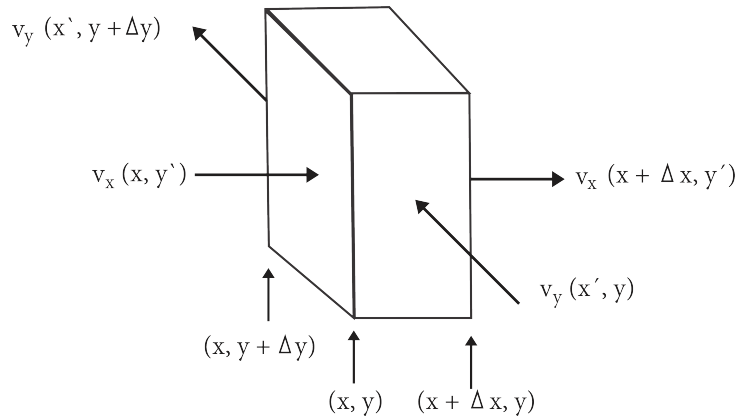


Figura 2.2.2: Yacimiento tridimensional, flujo en dos direcciones.

El centro del yacimiento estaría localizado en $x' = x + \frac{1}{2}\Delta x$ y $y' = y + \frac{1}{2}\Delta y$. El área transversal izquierda $H(x, y') \cdot \Delta y$. Entonces el caudal de flujo másico que entra en el yacimiento está dado por:

$$\rho(x, y') \cdot v_x(x, y') \cdot H(x, y') \cdot \Delta y = \Delta y (H\rho v_x)_{x, y'}$$

Similarmente, el fluido que sale del yacimiento por el área transversal derecha a un caudal de: $\Delta y (H\rho v_x)_{x+\Delta x, y'}$, el fluido que entra por la parte frontal a un caudal de: $\Delta y (H\rho v_y)_{x', y}$ y sale por la cara posterior a un caudal de: $\Delta x (H\rho v_y)_{x', y+\Delta y}$.

Como el volumen del yacimiento es $\bar{H} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$, el caudal de inyección de fluido inyectado al yacimiento es: $\bar{q} \bar{H} \Delta y \Delta x$, y el caudal de acumulación de masa es:

$$\frac{\partial (\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \bar{H} \Delta x \Delta y$$

Teniendo en cuenta que la Masa se conserva se obtiene:

$$\begin{aligned} & \left[\Delta y (H\rho v_x)_{x, y'} + \Delta x (H\rho v_y)_{x', y} \right] - \left[\Delta y (H\rho v_x)_{x+\Delta x, y'} + \Delta x (H\rho v_y)_{x', y+\Delta y} \right] \\ & + [\bar{q} \bar{H} \Delta x \Delta y] = \bar{H} \frac{\partial (\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \Delta x \Delta y \end{aligned}$$

Sin embargo, si se divide entre $\Delta x \Delta y$ y a su vez $\Delta x \rightarrow 0$ y $\Delta y \rightarrow 0$, se calcula que:

$$-\frac{\partial (H\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial (H\rho v_y)}{\partial y} + Hq = H \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.2.9)$$

La ecuación 2.2.9 representa el flujo de un fluido que recorre a un yacimiento en dos dimensiones tanto por la longitud y la altura del yacimiento.

2.2.1.3. Flujo tridimensional-monofásico y compresible

Consideramos ahora el balance de masa en la siguiente figura 2.2.3, con una longitud Δx , altura Δy , y espesor Δz . El centro de este yacimiento está ubicado en: $x' = x + \frac{1}{2} \Delta x$; $y' = y + \frac{1}{2} \Delta y$; $z' = z + \frac{1}{2} \Delta z$. El área transversal izquierda es: $\Delta y \Delta z$, entonces el caudal de fluido que ingresa al yacimiento por esta área es:

$$\rho(x, y', z') \cdot v_x(x, y', z') \cdot \Delta y \Delta z = \Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x, y', z'}$$

El fluido sale por el área derecha tendrá un caudal de: $\Delta y \Delta z (\rho v_x)_{x+\Delta x, y', z'}$.

El fluido entra por el área frontal tendrá un caudal de: $\Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x', y, z'}$.

El fluido que sale por el área posterior tendrá un caudal de: $\Delta x \Delta z (\rho v_y)_{x', y+\Delta y, z'}$.

El fluido ingresa por el área del fondo tendrá un caudal de: $\Delta x \Delta y (\rho v_z)_{x', y', z}$.

Cuando sale por el área posterior del yacimiento tendrá un caudal de:

$$\Delta x \Delta z y (\rho v_z)_{x', y', z+\Delta z}$$

El volumen del yacimiento es: $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$, entonces el caudal de inyección máximo será: $q \Delta x \Delta y \Delta z$.

Y el caudal de acumulación de masa en este yacimiento es:

$$\frac{\partial (\bar{\phi} \bar{\rho})}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$$

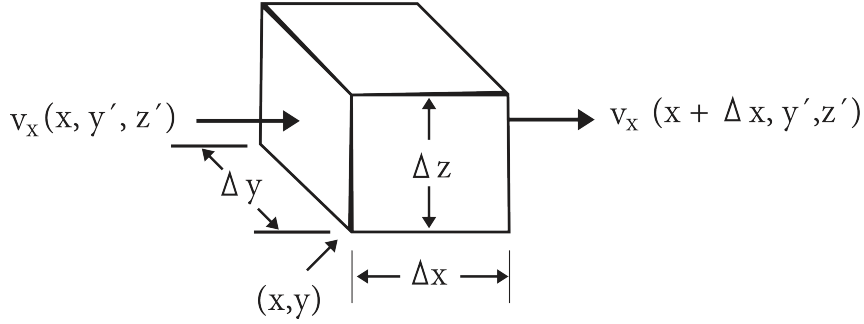


Figura 2.2.3: Yacimiento tridimensional, flujo en tres direcciones.

Sustituyendo las anteriores ecuaciones de caudal en la ecuación de Balance de Materia y dividiendo para $\Delta x \Delta y \Delta z$, teniendo en cuenta que $\Delta x \Delta y \Delta z$ tienden a cero, se obtiene:

$$-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + q = \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.2.10)$$

La ecuación 2.2.10 describe la dirección del flujo en tres dimensiones, la variación de la velocidad y de la densidad del fluido dado por su compresibilidad teniendo en cuenta que la masa se ha conservado.

2.2.2. Operadores diferenciales

Dado que u_x , u_y y u_z son componentes de un vector \vec{u} , la divergencia de este vector escrita $\nabla \cdot \vec{u}$, es un operador diferencial de este vector dado que:

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Otro operador diferencial es el gradiente que es un vector formado de las derivadas de una función escalar. Si u es una función escalar, el gradiente escrito como ∇u , entonces en los componentes x , y , z sería $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$ y $\partial u / \partial z$ respectivamente. Por lo tanto $\partial p / \partial x$, $\partial p / \partial y$ y $\partial p / \partial z$ son componentes de ∇p . Y $\partial D / \partial x$, $\partial D / \partial y$ y $\partial D / \partial z$ son componentes de ∇D . Por lo tanto se puede reescribir la ecuación de Darcy de la siguiente forma:

$$\vec{v} = -\frac{K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \quad (2.2.11)$$

2.2.3. Ley Generalizada de Darcy para Flujo Monofásico

Para describir la ecuación diferencial para el flujo en una, dos o tres dimensiones, en este trabajo se definirá una función de factor geométrico, α , así:

Flujo en una dimensión: $\alpha(x, y, z) = A(x)$

Flujo en dos dimensiones: $\alpha(x, y, z) = H(x, y)$

Flujo en tres dimensiones: $\alpha(x, y, z) = I(x, y, z)$

Entonces las ecuaciones para flujo en una, dos o tres dimensiones se puede escribir de la siguiente forma:

$$-\frac{\partial(\alpha\rho v_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\alpha\rho v_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\alpha\rho v_z)}{\partial z} + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.2.12)$$

Se reconoce que en la ecuación de flujo unidimensional v_y y v_z son cero, mientras que en la ecuación de flujo bidimensional v_z es cero. Teniendo en cuenta que α y ρ son funciones escalares, entonces $\partial(\alpha\rho v_x)$, $\partial(\alpha\rho v_y)$ y $\partial(\alpha\rho v_z)$ son componentes del vector $(\alpha\rho\vec{v})$, usando el concepto de divergencia la ecuación 2.2.12 puede escribirse de la siguiente forma:

$$-\nabla \cdot (\alpha\rho\vec{v}) + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.2.13)$$

Sustituyendo la ecuación 2.2.11 en la anterior ecuación, se obtiene la ecuación generalizada para flujo monofásico:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha\rho K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right] + \alpha q = \alpha \frac{\partial(\phi\rho)}{\partial t} \quad (2.2.14)$$

Para especificar las condiciones de contorno es necesario especificar la porosidad y una ecuación de estado para el fluido, son relaciones entre la porosidad, la densidad y la presión:

$$\phi = \phi(p), \rho = \rho(p)$$

Así se obtiene toda la información necesaria para resolver el problema.

2.2.3.1. Condiciones de contorno

En simulación numérica de yacimientos, una condición de contorno usada es cuando un yacimiento conecta con alguna curva cerrada C en la cual no hay flujo, la inyección de fluido y la producción toman lugar en pozos cuales pueden ser representados por puntos (Hales, 2006), en este caso estrictamente se debe representar sin flujo como condición de contorno que requiere el componente normal del vector \vec{v} y la curva C sea cero. Entonces el interés del problema está en el interior del yacimiento. Por esta razón es necesario representar el contorno curvado como lo muestra la siguiente figura. El yacimiento está dentro de un rectángulo, y las funciones K y ϕ son cero fuera de la curva C. Numéricamente no se puede representar un pozo como un punto, donde q es cero en cualquier parte a excepción de los pozos, e infinito en la ubicación de los pozos, por lo tanto se llegará a una aproximación.

Donde Q es el caudal másico de inyección en el pozo, V es el volumen de un paralelepípedo en el centro del pozo, entonces:

$$q = Q/V$$

Y por fuera del paralelepípedo, q es cero. Por cuanto cómo se dividirá la región computada en una malla con un espacio Δx para una dimensión, Δx y Δy para dos dimensiones, Δx , Δy y Δz para tres dimensiones; por lo tanto:

- Para una dimensión $V = A\Delta x$.
- Para dos dimensiones $V = H\Delta x\Delta y$.
- Para tres dimensiones $V = I\Delta x\Delta y\Delta z$.

Existen casos donde hay flujo como condición de contorno, una estrategia para simplificar el problema es usar pozos ficticios en el contorno o cerca de este con condiciones de Q y P en cada pozo, esto físicamente puede ser adecuado y matemáticamente satisface las ecuaciones.

2.2.3.2. Casos especiales para flujo monofásico

En algunas ecuaciones se utilizan simplificaciones para resolver el problema analíticamente, mientras que no son adecuadas para resolverlo numéricamente por simuladores de yacimientos, sin embargo sirven para entender los métodos numéricos utilizados en los simuladores.

La simplificación inicial es asumir que los efectos de la gravedad son despreciables, es decir: $\nabla D = 0$, y $q = 0$, entonces la ecuación 2.2.14 puede ser reescrita a:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha \rho K}{\mu} \nabla p \right) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t} \quad (2.2.15)$$

2.2.3.3. Líquido ideal de compresibilidad constante

La compresibilidad de un fluido se define como el cambio en el volumen del fluido dado por la presión aplicada sobre dicho fluido (Al-Marhoun, 2014), por:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \quad (2.2.16)$$

Para un líquido ideal con compresibilidad constante es decir viscosidad constante, los campos de integración son:

$$\rho = \rho_o^{[c(p-p_o)]} \quad (2.2.17)$$

donde ρ_o es la densidad a la presión de referencia, p_o , esta ecuación de estado se aplica bien a casi todos los líquidos, sin embargo estos pueden tener grandes cantidades de gas disuelto, teniendo en cuenta esto de la ecuación 2.2.16:

$$\rho dp = \frac{d\rho}{c}$$

$$\rho \nabla p = \frac{1}{c} \nabla p$$

Sustituyendo este concepto en la ecuación 2.2.15 resulta:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha K}{\mu} \nabla p \right) = \alpha \frac{\partial (\phi \rho)}{\partial t}$$

Sí el medio poroso es homogéneo, entonces α , K y ϕ son uniformes a lo largo del yacimiento, por lo tanto se obtiene:

$$\nabla^2 \rho = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.2.18)$$

2.2.3.4. Líquidos ligeramente compresibles

En estos casos la ecuación 2.2.18 se obtiene en términos de presión:

$$\nabla^2 p = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2.19)$$

Con técnicas analíticas como las Transformadas de Laplace, son usadas para encontrar la solución de la ecuación de conducción del calor para simular la eficiencia del yacimiento, la ecuación 2.2.19 es usada mucho más que la ecuación 2.2.18, es importante para reconocer la importancia de que se asume que la compresibilidad es pequeña. Para demostrar esto, se reescribe la ecuación 2.2.16 como $d\rho = c\rho dp$ y se obtiene:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = c\rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2.20)$$

y que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = c\rho \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.2.21)$$

Derivando la anterior ecuación con respecto a x, obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = c\rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x} = c\rho \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + c^2 \rho \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2$$

La anterior expresión se mantiene para $\partial^2 \rho / \partial y^2$ y $\partial^2 \rho / \partial z^2$, por lo tanto:

$$\nabla^2 \rho = c\rho \nabla^2 p + c^2 \rho \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (2.2.22)$$

Sustituyendo la ecuación 2.2.22 y 2.2.20 en la ecuación 2.2.18, y dividiendo para $c\rho$, resulta:

$$\nabla^2 p = c \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right] = \frac{\phi \mu c}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (2.2.23)$$

Para que la ecuación 2.2.19 sea una buena aproximación para la ecuación 2.2.23, es necesario que:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \gg c \left[\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Por lo tanto se demuestra que el valor de la compresibilidad c es muy pequeño.

2.2.3.5. Gas ideal

Un gas se define como un fluido homogéneo de baja viscosidad y densidad, que posee un volumen indefinido (Ahmed, 2015), en el caso de flujo de gas ideal a través de un medio poroso, podemos ignorar los efectos gravitacionales, entonces la ecuación de estado es:

$$\rho = \frac{M}{RT}p \quad (2.2.24)$$

Donde M es el peso molecular, R es la constante del gas, y T es la temperatura absoluta, sustituyendo la anterior ecuación en la ecuación 2.2.15 se obtiene:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha K}{\mu} p \nabla p \right) = \alpha \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t}$$

Sí α , K , ϕ y μ las volvemos a considerar como constantes, la anterior ecuación se puede escribir de la forma simple:

$$\nabla^2 p^2 = \frac{\phi \mu}{K p} \frac{\partial p^2}{\partial t} \quad (2.2.25)$$

Mientras que la ecuación 2.2.25 es no lineal, es muy similar a la ecuación 2.2.19.

2.2.3.6. Flujo incompresible

Los flujos incompresibles, ya sea de gases o líquidos, son flujos donde los cambios de densidad en el fluido no son una parte importante de la física (Panton, 2013).

Esta es una importante categoría del flujo monofásico, es el problema del flujo incompresible, con ρ y ϕ como constantes, entonces reemplazando en la ecuación 2.2.13 resulta:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla D) \right] + \frac{\alpha q}{\rho} = 0 \quad (2.2.26)$$

Para reducir términos es conveniente definir un potencial Φ como:

$$\Phi = p - \rho g D$$

Entonces operando en la ecuación 2.2.26 se simplifica a:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\alpha K}{\mu} \nabla \Phi \right) + \frac{\alpha q}{\rho} = 0$$

Para el caso de yacimientos homogéneos saturado con fluido de viscosidad constante, esto se simplifica a la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 \Phi + \frac{q \mu}{K \rho} = 0$$

Y en casos donde la condición de contorno es cero, es decir donde no entra caudal de flujo másico al yacimiento:

$$\nabla^2\Phi = 0$$

Para suficientes condiciones de contorno, los resultados de la teoría de potencial pueden ser aplicados a problemas simples de simulación numérica de yacimientos.

2.2.4. Flujo Bifásico

En simulación de yacimientos con el modelado del desplazamiento de fluidos en un medio poroso saturado por petróleo y gas o agua, mientras que fluido desplazante puede ser inmisible con el fluido desplazado (Hewett & Behrens, 1993). El desplazamiento ideal sería tipo pistón, sin embargo el proceso no es de tipo pistón con la superficie de dos fluidos.

Considerando el flujo simultáneo se asume que no se transfiere masa entre los dos fluidos, uno de los fluidos moja al medio poroso más que el otro, se considera a este fluido como la fase mojanante m , y al otro como la fase no mojanante n . En un sistema agua-petróleo el agua es el fluido de fase mojanante, en un sistema petróleo-gas el petróleo es el fluido de fase mojanante.

Muchos otros conceptos se han introducido para entender el flujo bifásico como la saturación, la presión capilar, y las permeabilidades relativas. La saturación de una fase se define como la fracción del volumen de dicha fase que contiene el medio poroso entre el volumen del medio poroso. Si dos fluidos están contenidos en el medio poroso, entonces:

$$S_m + S_n = 1 \quad (2.2.27)$$

Debido a la tensión superficial y a la curvatura de las interfaces entre los dos fluidos en los poros de la roca, la presión en el fluido no mojanante es mayor a la del fluido mojanante. La diferencia entre esas presiones es la presión capilar, p_c .

$$p_c = p_n - p_m \quad (2.2.28)$$

De forma empírica se obtuvo que la presión capilar es una función de la saturación:

$$p_n - p_m = p_c(S_m) \quad (2.2.29)$$

La permeabilidad relativa describe la facilidad que tiene un o varios fluidos para fluir en un medio poroso, en la siguiente imagen se puede apreciar las curvas típicas de las permeabilidades relativas del petróleo y del agua.

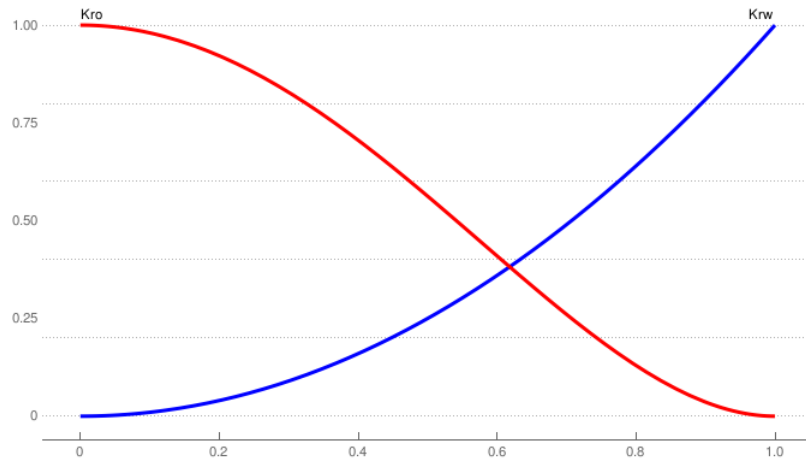


Figura 2.2.4: Curva típica de permeabilidades relativas.

La permeabilidad relativa del agua representa la curva azul y la otra curva es la permeabilidad relativa del petróleo, ambas como función de la saturación del agua descrito por un modelo cuadrático: $k_{rw} = S_w^2$ y $k_{ro} = (1 - S_w^2)^2$.

2.2.4.1. Ley de Darcy

La Ley de Darcy se extiende para flujo multifásico postulando que las presiones de cada fase están relacionadas con cada fluido a fluir (Pavone, 1990), por lo tanto se puede escribir de la siguiente forma:

$$\vec{v}_n = -\frac{K_n}{\mu_n} (\nabla p_n - \rho_n g \nabla D) \quad (2.2.30)$$

$$\vec{v}_m = -\frac{K_m}{\mu_m} (\nabla p_m - \rho_m g \nabla D) \quad (2.2.31)$$

Donde \vec{v}_n y \vec{v}_m son velocidades superficiales para los fluidos no mojante y mojante respectivamente, μ_n y μ_m son sus respectivas viscosidades, y ρ_n y ρ_m son sus respectivas densidades. K_n y K_m son las permeabilidades efectivas para el flujo de los dos fluidos. Como el flujo es simultáneo causa que el flujo de un fluido interfiera con el flujo del otro fluido. Estas permeabilidades deben ser menores o equivalentes a la permeabilidad del medio, entonces las permeabilidades relativas se definen por:

$$k_{rn} = \frac{K_n}{K} \leq 1 \quad (2.2.32)$$

$$k_{rm} = \frac{K_m}{K} \leq 1 \quad (2.2.33)$$

Las permeabilidades relativas empíricamente son funciones de la saturación de la fase mojante (Xu et al., 2014), las curvas típicas de las permeabilidades relativas son mostradas en la figura anterior.

Por tanto, se puede escribir la ecuación de Darcy usando las permeabilidades relativas:

$$\vec{v}_n = -\frac{Kk_{rn}}{\mu_n} (\nabla p_n - \rho_n g \nabla D) \quad (2.2.34)$$

$$\vec{v}_m = -\frac{Kk_{rm}}{\mu_m} (\nabla p_m - \rho_m g \nabla D) \quad (2.2.35)$$

2.2.4.2. Conservación de cada fase

Si consideramos derivar las ecuaciones de Balance de Masa para que esta se conserve (Ojo & Osisanya, 2006), y aplicando ecuaciones diferenciales a la ecuación 2.2.7 para cada fase, para obtener el término de acumulación que la cantidad de masa de cada fase en un volumen diferencial es el producto del volumen del elemento diferencial, la porosidad, la densidad de la fase y su saturación. Entonces los caudales de acumulación son:

Dimensión	Fase No mojante	Fase Mojante
1D	$A \frac{\partial(\phi \rho_n S_n)}{\partial t} \Delta x$	$A \frac{\partial(\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \Delta x$
2D	$H \frac{\partial(\phi \rho_n S_n)}{\partial t} \Delta x \Delta y$	$H \frac{\partial(\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \Delta x \Delta y$
3D	$I \frac{\partial(\phi \rho_n S_n)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$	$I \frac{\partial(\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \Delta x \Delta y \Delta z$

Tabla 2.1: Caudales de acumulación de fases no mojante y mojante

Sin embargo, se puede expandir la ecuación de continuidad 2.2.13, así para los fluidos no mojante y mojante:

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_n \vec{v}_n) + \alpha q_n = \alpha \frac{\partial(\phi \rho_n S_n)}{\partial t} \quad (2.2.36)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_m \vec{v}_m) + \alpha q_m = \alpha \frac{\partial(\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \quad (2.2.37)$$

2.2.5. Ecuaciones diferenciales para flujo bifásico

La combinación de las ecuaciones 2.2.34 y 2.2.36, se obtiene un set de ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo bifásico:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_n K k_{rn}}{\mu_n} (\nabla p_n - \rho_n g \nabla D) \right] + \alpha q_n = \alpha \frac{\partial(\phi \rho_n S_n)}{\partial t} \quad (2.2.38)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_m K k_{rm}}{\mu_m} (\nabla p_m - \rho_m g \nabla D) \right] + \alpha q_m = \alpha \frac{\partial(\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \quad (2.2.39)$$

Estas ecuaciones son extremadamente generales para su aplicabilidad, incluyen los efectos de compresibilidad, presión capilar, y permeabilidades relativas, así como variaciones con la posición de la permeabilidad absoluta y la porosidad.

2.2.6. Ecuaciones diferenciales alternativas para flujo bifásico

Las ecuaciones 2.2.38 y 2.2.39 se asemejan a la ecuación de conducción del calor:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (2.2.40)$$

Por lo tanto, se podría esperar que los problemas de flujo bifásico sean de naturaleza parabólica. No necesariamente es así pero puede demostrarse examinando detalladamente un par alternativo de ecuaciones diferenciales equivalentes a la ecuación 2.2.39. Lo primero es una ecuación de presión que describe cómo varía la presión con respecto al tiempo y a la posición, lo segundo es una ecuación de saturación que describe la saturación con respecto al tiempo y a la posición.

2.2.6.1. Ecuación diferencial de la presión

Se deriva la ecuación diferencial de la presión es para el tiempo de las derivadas de la saturación, por tanto se expande el tiempo de las derivadas de las ecuaciones 2.2.38 y 2.2.39, y se obtiene:

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_n \vec{v}_n) + \alpha q_n = \alpha \left[\rho_n S_n \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_n \frac{d\rho_n}{dp_n} \frac{\partial p_n}{\partial t} + \phi \rho_n \frac{\partial S_n}{\partial t} \right] \quad (2.2.41)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_m \vec{v}_m) + \alpha q_m = \alpha \left[\rho_m S_m \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_m \frac{d\rho_m}{dp_m} \frac{\partial p_m}{\partial t} + \phi \rho_m \frac{\partial S_m}{\partial t} \right] \quad (2.2.42)$$

Se divide la ecuación 2.2.41 entre $\alpha \rho_n$ y la ecuación 2.2.42 entre $\alpha \rho_m$ y resulta:

$$\begin{aligned} & - \left(\frac{1}{\alpha \rho_n} \right) \nabla \cdot (\alpha \rho_n \vec{v}_n) - \left(\frac{1}{\alpha \rho_m} \right) \nabla \cdot (\alpha \rho_m \vec{v}_m) + Q_t \\ & = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi S_n c_n \frac{\partial p_n}{\partial t} + \phi S_m c_m \frac{\partial p_m}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2.43)$$

donde:

$$Q_t = \left(\frac{q_n}{\rho_n} \right) + \left(\frac{q_m}{\rho_m} \right) \quad (2.2.44)$$

es el caudal volumétrico de inyección total, y:

$$c_n = \frac{1}{\rho_n} \frac{d\rho_n}{dp_n}; c_m = \frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dp_m} \quad (2.2.45)$$

son compresibilidades de las fases, analógicamente a la compresibilidad de flujo monofásico mencionado anteriormente. Las derivadas de tiempo de la saturación se han eliminado en la ecuación 2.2.43.

Una presión promedio se puede definir por:

$$p_{prom} = \frac{(p_n + p_m)}{2} \quad (2.2.46)$$

Las presiones de las fases pueden ser representadas en términos de presión promedio y de presión capilar, así:

$$p_n = p_{prom} + \frac{1}{2}p_c; p_m = p_{prom} - \frac{1}{2}p_c \quad (2.2.47)$$

En adición se define las movibilidades de las fases, λ_n y λ_m :

$$\lambda_n = Kk_{rn}/\mu_n; \lambda_m = Kk_{rm}/\mu_m \quad (2.2.48)$$

Entonces se reemplaza en las ecuaciones 2.2.36 en la ecuación 2.2.43 y reordenando resulta la ecuación final de la presión:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{\alpha\rho_n} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_n\lambda_n) + \left(\frac{1}{\alpha\rho_m} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_m\lambda_m) \right] \nabla p_{prom} + \\ & \left[\left(\frac{1}{2\alpha\rho_n} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_n\lambda_n) - \left(\frac{1}{2\alpha\rho_m} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_m\lambda_m) \right] \nabla p_c + Q_t \\ = & \left[\left(\frac{d\phi}{dp_{prom}} \right) + \phi(S_n c_n + S_m c_m) \right] \frac{\partial p_{prom}}{\partial t} + \left[\phi \frac{(S_n c_n - S_m c_m)}{2} \right] \frac{\partial p_c}{\partial t} \\ & + g \left[\left(\frac{1}{\alpha\rho_n} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_n^2\lambda_n) + \left(\frac{1}{\alpha\rho_m} \right) \nabla \cdot (\alpha\rho_m^2\lambda_m) \right] \nabla D \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

2.2.6.2. Caracterización de la ecuación diferencial de la presión

En la ecuación 2.2.49 se puede ignorar términos como la variación del momento $\alpha\rho_n$ y $\alpha\rho_m$ con la posición, también la presión capilar por ser casi relativamente despreciable, entonces esta ecuación se simplifica a:

$$\nabla \cdot (\lambda_n + \lambda_m) \nabla p_{prom} + Q_t \approx \phi c_t \frac{\partial p_{prom}}{\partial t} \quad (2.2.50)$$

donde c_t es la compresibilidad total, definida por:

$$c_t = \left(\frac{1}{\phi} \right) \left(\frac{d\phi}{dp_{prom}} \right) + (S_n c_n + S_m c_m) \quad (2.2.51)$$

Los efectos de la compresibilidad no pueden ser ignorados en los cálculos de ingeniería de yacimientos, agregando que cualquier simulador de yacimientos debe ser capaz de resolver problemas adecuadamente para flujo multifásico de fluidos compresibles e incompresibles.

2.2.6.3. Velocidad total para el caso de fluido incompresible

Para este caso ϕ , ρ_n y ρ_m se consideran constantes, entonces la ecuación 2.2.43 se reduce a:

$$-\left(\frac{1}{\alpha}\right) \nabla \cdot (\alpha \vec{v}_n + \alpha \vec{v}_m) + Q_t = 0$$

entonces se define la velocidad total como:

$$v_t = v_n + v_m \quad (2.2.52)$$

por lo tanto:

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{v}_t) = \alpha Q_t \quad (2.2.53)$$

La simplicidad de esta ecuación indica el rol fundamental que juega la velocidad total en el flujo bifásico.

2.2.6.4. Ecuación diferencial de la saturación

De la ecuación diferencial de la presión se puede obtener la ecuación diferencial de la saturación, se obtiene la velocidad de la fase mojante en términos de la velocidad total, se obtiene:

$$\nabla p_c = \nabla p_n - \nabla p_w$$

$$\vec{v}_n = -\lambda_n (\nabla p_n - \rho_n g \nabla D); \vec{v}_m = -\lambda_m (\nabla p_m - \rho_m g \nabla D)$$

La combinación de esas ecuaciones y reordenando:

$$\lambda_n \lambda_m \nabla p_c = -\lambda_m \vec{v}_n + \lambda_n \vec{v}_m + \lambda_n \lambda_m (\rho_n - \rho_m) g \nabla D$$

Usando la definición de la ecuación 2.2.52 se elimina v_n y resulta:

$$(\lambda_n + \lambda_m) \vec{v}_m = \lambda_m v_t + \lambda_n \lambda_m [\nabla p_c + (\rho_m - \rho_n) g \nabla D] \quad (2.2.54)$$

se define las siguientes funciones de flujo fraccional con respecto a la saturación:

$$f_m = \frac{\lambda_m}{\lambda_n + \lambda_m} \quad (2.2.55)$$

$$h_m = -\frac{\lambda_n \lambda_m}{\lambda_n + \lambda_m} \frac{dp_c}{dS_m} \quad (2.2.56)$$

En la siguiente figura se presenta una curva típica de f_m vs S_m , el signo negativo incluye la definición de h_m para mantenerlo positivo, desde p_c es una función decreciente de S_m , por tanto la ecuación 2.2.54 da:

$$\vec{v}_m = f_m \vec{v}_t - h_m \nabla S_m + \lambda_n f_m (\rho_m - \rho_n) g \nabla D \quad (2.2.57)$$

y la ecuación 2.2.39 puede ser escrita en la siguiente forma final de la ecuación de la saturación:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha \rho_m h_m \nabla S_m) - \nabla \cdot (\alpha \rho_m f_m) [\vec{v}_t + \lambda_n (\rho_m - \rho_n) g \nabla D] \\ + \alpha q_m = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_m S_m)}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.2.58)$$

Se puede simplificar la anterior ecuación asumiendo que el fluido es incompresible, que la porosidad y las densidades de los fluidos son constantes, resulta:

$$\nabla \cdot (\alpha h_m \nabla S_m) - \nabla \cdot (\alpha f_m \vec{v}_t) - \nabla \cdot (\alpha G_m \nabla D) + \alpha \left(\frac{q_m}{\rho_m} \right) = \alpha \phi \frac{\partial S_m}{\partial t} \quad (2.2.59)$$

donde:

$$G_m = f_m \lambda_n (\rho_m - \rho_n) g \quad (2.2.60)$$

es otra función de la saturación, el segundo término de la anterior ecuación es definida por dos vectores, por lo tanto se puede escribir:

$$\nabla f_m = \frac{df_m}{dS_m} \nabla S_m \quad (2.2.61)$$

Sí se considera que no entra masa al yacimiento por los contornos, es decir el flujo es cero, entonces $q_w = Q_t = 0$ entonces la ecuación 2.2.53 resulta:

$$\nabla \cdot (\alpha \vec{v}_t) = 0 \quad (2.2.62)$$

por lo tanto la ecuación 2.2.59 se reduce a:

$$\left(\frac{1}{\alpha} \right) \nabla \cdot (\alpha h_m \nabla S_m) - \frac{df_m}{dS_m} \vec{v}_t \cdot \nabla S_m = \phi \frac{\partial S_m}{\partial t} + \left(\frac{1}{\alpha} \right) \nabla \cdot (\alpha G_m \nabla D) \quad (2.2.63)$$

2.2.6.5. Ecuación de difusión-conducción

La anterior ecuación puede considerarse como variación no lineal de la ecuación de difusión-conducción:

$$\mathfrak{D} \nabla^2 C - \vec{v} \cdot \nabla C = \phi \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.2.64)$$

que gobierna el desplazamiento multidimensional miscible, donde \mathfrak{D} es difusividad y C es concentración, el primer término de esta ecuación se comporta como la conducción del calor, el término central representa cuando la difusión es pequeña es decir la convección, sí domina se aproxima a la ecuación hiperbólica de primer orden:

$$- \vec{v} \cdot \nabla C = \phi \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.2.65)$$

El carácter de primer orden de la ecuación 2.2.65 puede entenderse más fácil expandiendo el término de la izquierda:

$$-\vec{v}_x \frac{\partial C}{\partial x} - \vec{v}_y \frac{\partial C}{\partial y} - \vec{v}_z \frac{\partial C}{\partial z} = \phi \frac{\partial C}{\partial t} \quad (2.2.66)$$

Esta ecuación describe la convección en un sistema multidimensional.

2.2.7. Teoría de Buckley-Leverett

Volviendo a la ecuación 2.2.63 tiene naturaleza parabólica o hiperbólica, dependiendo de la importancia del término de la presión capilar relativo al término de convección. Cuando los efectos de la presión capilar dominan h_w es grande y esta ecuación se comportaría como un problema parabólico, cuando el término de la presión capilar es pequeño o despreciable y las velocidades son grandes entonces se aproxima a una ecuación de primer orden no lineal hiperbólica:

$$-\frac{df_w}{dS_w} \vec{v}_t \cdot \nabla S_w = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} + \left(\frac{1}{\alpha}\right) \nabla \cdot (\alpha G_w \nabla D) \quad (2.2.67)$$

Se escribe con subíndices w porque generalmente la fase mojanete es el agua (w), por lo tanto la ecuación 2.2.67 es una función de la saturación del agua.

2.2.7.1. Caso unidimensional

De interés particular es el caso de desplazamiento lineal en un tubo delgado uniforme inclinado en el eje horizontal en la dirección x con un ángulo α_d , entonces:

$$\nabla D = \frac{\partial D}{\partial x} = -\sin(\alpha_d)$$

por tanto la ecuación 2.2.67 se reduce a:

$$-\frac{df_w}{dS_w} v_{tx} \frac{\partial S_w}{\partial x} = \phi \frac{\partial S_w}{\partial t} - \sin \alpha_d \frac{dG_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} \quad (2.2.68)$$

entonces la ecuación 2.2.62 simplifica en:

$$A \left(\frac{\partial v_{tx}}{\partial x} \right) = 0$$

esto implica que v_{tx} es constante, bajo esta sustitución de las ecuaciones 2.2.60 y 2.2.68 se reordenan en:

$$v_{tx} \frac{dF_w}{dS_w} \frac{\partial S_w}{\partial x} = -\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} \quad (2.2.69)$$

donde:

$$F_w = f_w \left[1 - \left(\frac{\lambda_n}{v_{tx}} \right) (\rho_w - \rho_n) g \sin \alpha_d \right] \quad (2.2.70)$$

es la fracción del flujo de fluidos cual es la fase mojanete.

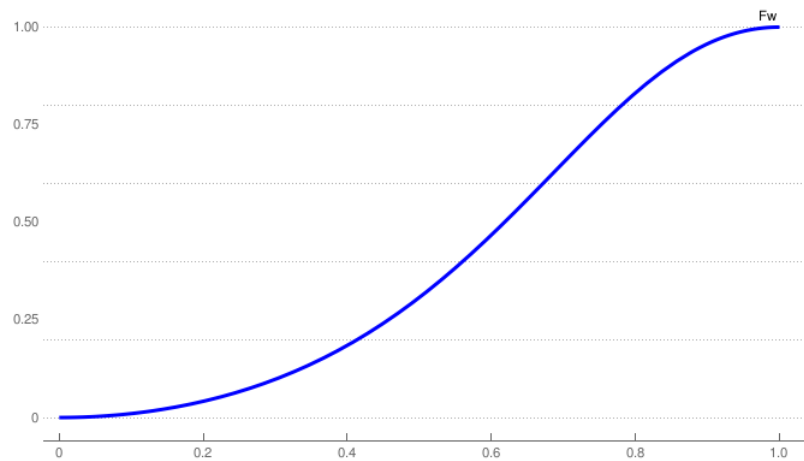


Figura 2.2.5: Curva típica del flujo fraccional, F_w .

Como se puede apreciar en la figura 2.2.5 el flujo fraccional es una función principalmente de la saturación del agua, sin embargo también es función de la densidad de los fluidos y de la gravedad, como se describe en la ecuación 2.2.70.

El caudal de avance de un punto de saturación constante puede ser calculado usando la relación:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = \frac{\partial S_w}{\partial t} \left(\frac{\partial S_w}{\partial x}\right)^{-1}$$

Usando la ecuación 2.2.69 para eliminar $\partial S_w / \partial t$ de esta ecuación, se obtiene:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{S_w} = \frac{v_{tx}}{\phi} \frac{dF_w}{dS_w} \quad (2.2.71)$$

La anterior ecuación fue derivada por Buckley y Leverett en 1942, y puede ser utilizada para resolver directamente para la saturación como una función de posición y tiempo (Chang & Yortsos, 1992), posteriormente la Ecuación de Buckley-Leverett ha tomado el significado de una ecuación de saturación que involucra la velocidad total, entonces las ecuaciones 2.2.63 y 2.2.67 son formas de la ecuación de Buckley-Leverett para casos multidimensionales.

Para un yacimiento lineal de longitud 100 metros, con área transversal de 100 metros cuadrados, con porosidad constante del 20 %, se inyecta agua desde un pozo inyector hacia un pozo productor para desplazar el petróleo, la gráfica de saturación versus longitud quedaría así:

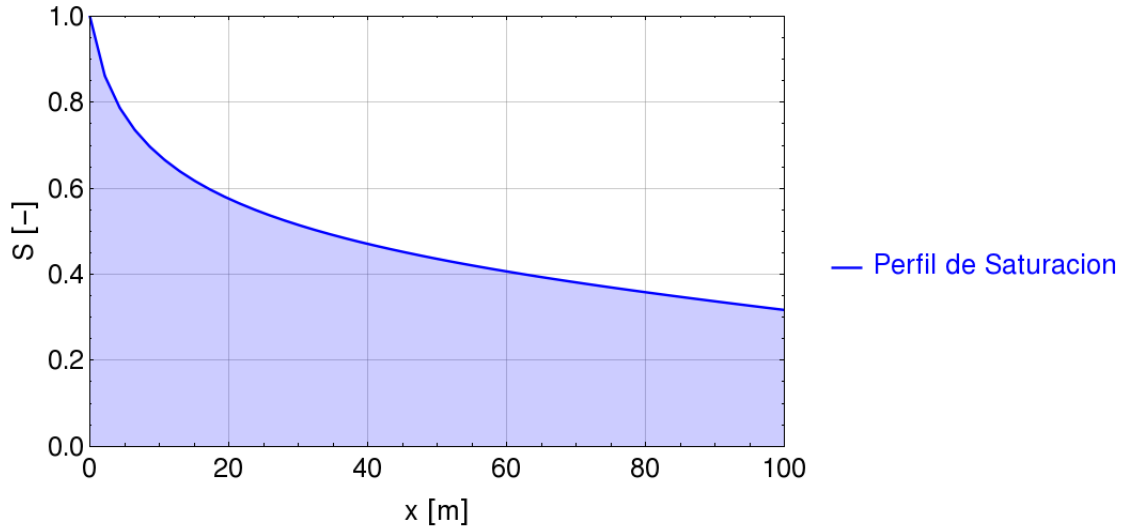


Figura 2.2.6: Perfil de saturación vs desplazamiento.

La figura 2.2.6 muestra cómo avanza el flujo de agua sería el área bajo la curva desde el pozo inyector ubicado en 0 metros hacia el pozo productor ubicado en 100 metros, indica la teoría de desplazamiento inmisible de Buckley-Leverett y que esta no se comporta como un pistón ideal. Se puede deducir de la imagen que el agua inyectada está siendo producida por el pozo productor, es decir paso el tiempo de la ruptura, también que la saturación en el frente es aproximadamente 3.7.

2.2.7.2. Caso radial

Este caso es una extensión de la teoría de Desplazamiento de Buckley y Leverett, para esto se necesita usar coordenadas cilíndricas, conociendo que el área de un cilindro es $2\pi r^2$ y reemplazando en la ecuación de continuidad para el caso del agua: $-\nabla \cdot (\vec{u}_w) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi S_w)$.

Sabiendo que $\vec{u}_w = \vec{q}_w/A = f_w \vec{q}_t/A$ entonces:

$$\frac{\vec{q}_t}{2\pi r^2} \nabla \cdot \left(\frac{f_w}{r} \right) + \frac{\partial S_w}{\partial t} = 0$$

Operando se obtiene la función de frente de saturación con respecto al volumen poroso de un yacimiento radial y al volumen de agua inyectado (Machado, 2011):

$$r_f = +\sqrt{r_w^2 + \frac{f'_w f_w}{\pi h \phi} q_t t}$$

donde r_f es la saturación en el frente, r_w es el radio del pozo considerando el tamaño del yacimiento r_w tiende a cero, f'_w es función del flujo fraccional, $q_t t$ es el volumen de agua inyectado en un determinado tiempo, la expresión $\pi h \phi$ representa el volumen poroso en un yacimiento radial.

2.2.8.2. Conservación de cada fase

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_g \vec{v}_g) + \alpha q_g = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_g S_g)}{\partial t} \quad (2.2.75)$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_o \vec{v}_o) + \alpha q_o = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_o S_o)}{\partial t}$$

$$-\nabla \cdot (\alpha \rho_w \vec{v}_w) + \alpha q_w = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_w S_w)}{\partial t}$$

2.2.9. Ecuaciones diferenciales

Para este caso las derivadas de tiempo pueden ser eliminadas para obtener una ecuación de presión, se puede definir una velocidad total que es la suma de las velocidades de las tres fases, sin embargo, en vez de usar una ecuación de saturación, se obtienen dos ecuaciones simultáneas de saturación.

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_g K k_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) \right] + \alpha q_g = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_g S_g)}{\partial t} \quad (2.2.76)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_o K k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right] + \alpha q_o = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_o S_o)}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_w K k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \right] + \alpha q_w = \alpha \frac{\partial (\phi \rho_w S_w)}{\partial t}$$

2.2.9.1. Flujo con cambio de fase - Modelo Composicional

En este caso se considera donde existe N componentes químicos, cualquiera de estos puede existir en una o en todas las fases. C_{ig} es la fracción de masa de los i th componentes en la fase del gas, C_{io} es la fracción másica de los i th componentes en la fase del petróleo y C_{iw} es la fracción másica de los componentes i th en la fase del agua. No se involucra la transferencia de hidrocarburos entre la fase del gas y del petróleo, también permite que otros componentes puedan disolverse en el agua (Acs et al., 1985).

Balance de componentes

Prácticamente ya no se puede decir que la masa de cada fase se conserva porque existe la posibilidad de transferencia de componentes entre las fases, por tanto se observa que la masa total de cada componente debe ser conservada. Como las densidades del flujo másico para cada fase son: $\rho_g \vec{v}_g$, $\rho_o \vec{v}_o$ y $\rho_w \vec{v}_w$, entonces la densidad del flujo másico para el componente i th debe ser:

$$C_{ig} \rho_g \vec{v}_g + C_{io} \rho_o \vec{v}_o + C_{iw} \rho_w \vec{v}_w \quad (2.2.77)$$

La masa del componente i por unidad del volumen poroso de un yacimiento es:

$$\phi (C_{ig}\rho_g S_g + C_{io}\rho_o S_o + C_{iw}\rho_w S_w) \quad (2.2.78)$$

Adicionalmente se denota q_i como el caudal másico de inyección del componente i por unidad de volumen, entonces para cada componente, se puede escribir la ecuación de conservación así:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot [\alpha (C_{ig}\rho_g \vec{v}_g + C_{io}\rho_o \vec{v}_o + C_{iw}\rho_w \vec{v}_w)] + \alpha q_i \\ = \alpha \frac{\partial}{\partial t} [\phi (C_{ig}\rho_g S_g + C_{io}\rho_o S_o + C_{iw}\rho_w S_w)] \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

Ley de Darcy

La ley de Darcy escrita para un sistema de ecuaciones para las tres fases (ecuaciones 2.2.74), se mantiene si se sustituye en la ecuación 2.2.79, se ha utilizado G para describir la ecuación de Darcy para el gas, O para la ecuación de Darcy para el petróleo y W para la ecuación de Darcy del agua, y reducir la ecuación a:

$$\begin{aligned} G &= \frac{\alpha C_{ig}\rho_g K k_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) \\ O &= \frac{\alpha C_{io}\rho_o K k_{ro}}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \\ W &= \frac{\alpha C_{iw}\rho_w K k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot [G + O + W] + \alpha q_i = \alpha \frac{\partial}{\partial t} [\phi (C_{ig}\rho_g S_g + C_{io}\rho_o S_o + C_{iw}\rho_w S_w)] \quad (2.2.80)$$

Relaciones auxiliares

Si existen N ecuaciones diferenciales, estas se numeran en la siguiente tabla, y en total son $3N + 15$.

Variables	Número
C_{ig}	N
C_{io}	N
C_{iw}	N
p_g, p_o, p_w	3
S_g, S_o, S_w	3
ρ_g, ρ_o, ρ_w	3
μ_g, μ_o, μ_w	3
k_{rg}, k_{ro}, k_{rw}	3
Total	$3N + 15$

Tabla 2.2: Variables dependientes

Para determinar la solución a este sistema, se necesitará $3N+15$ relaciones, diferenciales, funcionales o algebraicas independientes. También a las ecuaciones diferenciales, se tiene las siguientes relaciones algebraicas:

$$S_g + S_o + S_w = 1$$

Además, en cada fase las fracciones másicas deben sumar 1.

$$\sum_{i=1}^N C_{ig} = \sum_{i=1}^N C_{io} = \sum_{i=1}^N C_{iw} = 1 \quad (2.2.81)$$

Densidades y viscosidades son funciones de las presiones de las fases y de los componentes:

$$\rho_g = f_1(p_g, C_{ig}); \rho_o = f_2(p_o, C_{io}); \rho_w = f_3(p_w, C_{iw}) \quad (2.2.82)$$

$$\mu_g = f_4(p_g, C_{ig}); \mu_o = f_5(p_o, C_{io}); \mu_w = f_6(p_w, C_{iw}) \quad (2.2.83)$$

Las permeabilidades relativas son funciones de saturación:

$$k_{rg} = f_7(S_g, S_o, S_w); k_{ro} = f_8(S_g, S_o, S_w); k_{rw} = f_9(S_g, S_o, S_w); \quad (2.2.84)$$

Sólo hay dos relaciones independientes de la presión capilar:

$$p_g - p_o = p_{c_{go}}(S_g, S_o, S_w)$$

$$p_o - p_w = p_{c_{ow}}(S_g, S_o, S_w) \quad (2.2.85)$$

Finalmente, por cada par de fases, hay una distribución que es constante para cada componente, la distribución constante será una función de presión, temperatura y composición, entonces:

$$\frac{C_{ig}}{C_{io}} = K_{igo}(T, p_g, p_o, C_{ig}, C_{io});$$

$$\frac{C_{ig}}{C_{iw}} = K_{igw}(T, p_g, p_w, C_{ig}, C_{iw});$$

$$\frac{C_{io}}{C_{iw}} = K_{iow} = \frac{K_{igw}}{K_{igo}} \quad (2.2.86)$$

Sin embargo, la tercera ecuación es dependiente de las dos primeras, por lo tanto hay relaciones $2N$ para el equilibrio de la fase. La siguiente tabla resume el número de relaciones, se puede observar que hay tantas relaciones como variables dependientes:

Relación	Ecuaciones	Número
Ecuaciones diferenciales parciales	2.2.80	N
$\sum S$	2.2.72	1
$\sum C_i$	2.2.81	3
ρ	2.2.82	3
μ	2.2.83	3
k_r	2.2.84	3
Capilaridad	2.2.85	2
Equilibrio de fase	2.2.86	$2N$
Total	$3N+15$	

Tabla 2.3: Listado de relaciones

2.2.9.2. Modelo Black-Oil

Sistema de hidrocarburos, dos componentes, simplificado

Mientras que el modelo composicional es extremadamente complejo para resolver, este modelo es necesario para sistemas de petróleo volátiles. Sin embargo para bajas volatilidades en los sistemas petroleros que consiste principalmente en metano y en componentes pesados, un modelo simplificado "black-oil" o modelo de dos componentes describe el equilibrio de hidrocarburos puede ser usado, utilizando información desde una prueba convencional de vaporización diferencial sobre la muestra de petróleo del yacimiento (Schindler, 2007).

En este modelo simplificado se asume que no se transfiere la masa entre la fase acuosa y las otras dos fases. En el sistema de hidrocarburos, sólo dos componentes son considerados, el componente *petróleo* es el líquido residual obtenido después de la prueba de vaporización a condiciones atmosféricas, el componente *gas* es el fluido remanente.

Considere una muestra de un yacimiento de petróleo que contiene W_O en peso del componente petróleo y W_G del componente gas, tiene ρ_{OS} es la densidad del componente petróleo y ρ_{GS} del componente gas, ambos medidos a condiciones estándar. La solubilidad del gas R_{so} se define como el volumen de gas disuelto a una presión dada y una temperatura de yacimiento en una unidad de volumen de barriles de petróleo, que es:

$$R_{so}(p, T) = \frac{V_{GS}}{V_{OS}} \quad (2.2.87)$$

desde:

$$V_{GS} = \frac{W_G}{\rho_{GS}} \quad (2.2.88)$$

y:

$$V_{OS} = \frac{W_O}{\rho_{OS}} \quad (2.2.89)$$

entonces:

$$R_{so} = \frac{W_G \rho_{os}}{W_O \rho_{GS}} \quad (2.2.90)$$

Ahora, el volumen de la fase petróleo a temperatura del yacimiento y presión no es V_{OS} , pero es algo más grande, desde que el gas disuelto causa expansión de los hidrocarburos líquidos. La formación del factor volumétrico del petróleo B_o se define como la relación del volumen del petróleo y su gas disuelto a condiciones de yacimiento, al volumen del componente petróleo medido a condiciones estándar, por tanto:

$$B_o(p, T) = \frac{V_o(p, T)}{V_{OS}} \quad (2.2.91)$$

Pero:

$$B_o = \frac{(W_G + W_O)}{\rho_o} \quad (2.2.92)$$

Combinando las ecuaciones 2.2.89, 2.2.91 y 2.2.92 da:

$$B_o = \frac{(W_G + W_O) \rho_{OS}}{W_O \rho_o} \quad (2.2.93)$$

Ahora, se puede determinar la fracción másica de los dos componentes en la fase del petróleo, desde las ecuaciones 2.2.90 y 2.2.93, resulta:

$$C_{GO} = \frac{W_G}{(W_O + W_G)} = \frac{R_{so} \rho_{GS}}{B_o \rho_o} \quad (2.2.94)$$

y desde la ecuación 2.2.93 se obtiene:

$$C_{Oo} = \frac{W_O}{(W_O + W_G)} = \frac{\rho_{OS}}{B_o \rho_o} \quad (2.2.95)$$

El factor volumétrico de formación de gas B_g es la relación del volumen del gas libre medido a condiciones de yacimiento, entre el volumen del mismo gas a condiciones estándar, entonces:

$$B_g(p, T) = \frac{V_g(p, T)}{V_{GS}} \quad (2.2.96)$$

Dado que $W_g = W_G$ es el peso del gas libre. Pues $V_g = W_G/\rho_g$ y $V_{GS} = W_G/\rho_{GS}$, se tiene:

$$B_g = \frac{\rho_{GS}}{\rho_g} \quad (2.2.97)$$

Finalmente, por consistencia se define el factor volumétrico de formación del agua B_w de la misma forma:

$$B_w = \frac{\rho_{WS}}{\rho_w} \quad (2.2.98)$$

Ecuaciones diferenciales para el modelo Black-Oil

Para usar las ecuaciones diferenciales anteriormente obtenidas del modelo composicional, se necesita definir las fracciones máxicas C_{ig} , C_{io} y C_{iw} , dado que la fase gaseosa tiene todos los componentes gaseosos, se tiene:

$$C_{Gg} = 1; C_{Og} = 0; C_{Wg} = 0$$

Similarmente, la fase acuosa es toda el agua, entonces:

$$C_{Gw} = 0; C_{Ow} = 0; C_{Ww} = 1$$

Para la fase de petróleo se ha obtenido C_{Go} y C_{Oo} de las ecuaciones 2.2.94 y 2.2.95, para agregar:

$$C_{Wo} = 0$$

Sustituyendo esas fracciones máxicas en la ecuación 2.2.80, para el componente gas ($i=G$):

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_g K k_{rg}}{\mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) + \frac{\alpha R_{so} \rho_{GS} \rho_o K k_{ro}}{B_o \rho_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right] \\ + \alpha q_G = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\rho_g S_g + \frac{R_{so} \rho_{GS} \rho_o S_o}{B_o \rho_o} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.99)$$

Para el componente petróleo ($i=O$):

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_{OS} \rho_o K k_{ro}}{B_o \rho_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right] + \alpha q_o = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho_{OS} \rho_o S_o}{B_o \rho_o} \right) \quad (2.2.100)$$

Y para el componente del agua ($i=W$):

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha \rho_w K k_{rw}}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \right] + \alpha q_w = \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w) \quad (2.2.101)$$

De las ecuaciones 2.2.97 y 2.2.98 se tiene:

$$\rho_g = \frac{\rho_{GS}}{B_g} \quad (2.2.102)$$

$$\rho_w = \frac{\rho_{WS}}{B_w} \quad (2.2.103)$$

Agregando las ecuaciones 2.2.94 y 2.2.95 y notando que $C_{Go} + C_{Oo} = 1$, se obtiene:

$$\rho_o = \frac{(R_{so} \rho_{GS} + \rho_{OS})}{B_o} \quad (2.2.104)$$

Sustituyendo para esas densidades en las ecuaciones 2.2.99, 2.2.100 y 2.2.101, dividiendo respectivamente por ρ_{GS} , ρ_{OS} y ρ_{WS} se obtiene la ecuación diferencial para el componente del gas:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left[\frac{\alpha K k_{rg}}{B_g \mu_g} (\nabla p_g - \rho_g g \nabla D) + \frac{\alpha R_{so} \rho_o K k_{ro}}{B_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right] + \frac{\alpha q_G}{\rho_{GS}} \\ = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left[\phi \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.2.105)$$

Para el componente del petróleo:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K k_{ro}}{B_o \mu_o} (\nabla p_o - \rho_o g \nabla D) \right] + \frac{\alpha q_O}{\rho_{OS}} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) \quad (2.2.106)$$

Y para el componente del agua:

$$\nabla \cdot \left[\frac{\alpha K k_{rw}}{B_w \mu_w} (\nabla p_w - \rho_w g \nabla D) \right] + \frac{\alpha q_W}{\rho_{WS}} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \quad (2.2.107)$$

Las anteriores ecuaciones no representan Balance de Masa, en cambio describen Balances de Volúmenes a condiciones estándar.

2.3. Método de los Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un método numérico para resolver las ecuaciones diferenciales en cada elemento de una malla de simulación, MEF tiene ciertas ventajas como condiciones generales de contorno, geometrías complejas, propiedades de los materiales variables, heterogeneidades, este método lo introdujo Courant en 1943 (Stein, 2014), en los años 1950 a 1970 fue desarrollado por matemáticos e ingenieros como un método general para las soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales parciales. Algunas ventajas adicionales por la aplicación de este método a la simulación numérica de yacimientos como en la refinación de celdas, en pozos horizontales y desviados, técnicas corner point, simulación de fallas y fracturas, y en alta precisión en las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

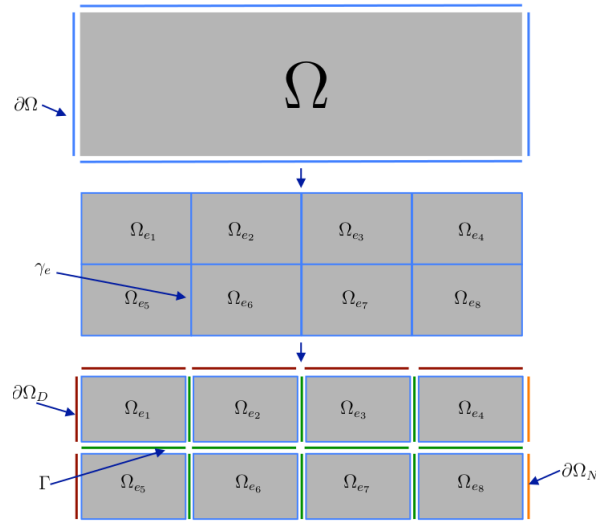


Figura 2.3.1: División del dominio en elementos finitos. (Villegas, 2016)

Este método divide una región en elementos finitos proceso conocido como *discretización*, entonces reconecta los elementos con nodos, estos nodos mantienen a los elementos juntos, este proceso resulta en un set de ecuaciones algebraicas simultáneas. Se usan *funciones de interpolación* para interpolar las variables sobre los elementos, generalmente se utilizan polinomios para funciones de interpolación. Calcula las *propiedades de los elementos* para esto se establecen ecuaciones matriciales en cada elemento finito que relaciona los valores de los nodos de la propiedad desconocida con otros parámetros. Al final este método *ensambla todas las ecuaciones de los elementos* para encontrar la ecuación global del sistema, resuelve el sistema de ecuaciones globales con métodos directos o iterativos. Finalmente se *computan los resultados* para calcular parámetros adicionales (Nikishkov, 2004).

En física e ingeniería muchos fenómenos pueden ser explicados por ecuaciones diferenciales y por condiciones de contorno.

Fenómenos	Ecuación
Problemas elásticos	Ecuación diferencial: $L(\phi) + f = 0$
Problemas térmicos	
Problemas de flujo de fluidos	Condiciones de contorno: $B(\phi) + g = 0$
Problemas electrostáticos	

Tabla 2.4: Problemas de física e ingeniería con ecuación diferencial.

Aplicando el método de los elementos finitos para solucionar un problema se obtiene un set de ecuaciones algebraicas simultáneas que son difíciles de resolver analíticamente (Cook et al., 2001).

Cuando MEF es usado para una solución de problemas estáticos, se obtiene un set de ecuaciones lineales de la forma:

$$\mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (2.3.1)$$

Donde \mathbf{K} es la matriz de rigidez de una estructura, \mathbf{X} es el vector de desplazamiento y \mathbf{F} es el vector de carga.

Fenómeno	Propiedad [K]	Comportamiento $\{X\}$	Acción $\{F\}$
Elasticidad	Rigidez	Desplazamiento	Fuerza
Conducción	Conductividad	Temperatura	Fuente de calor
Fluidez	Viscosidad	Velocidad	Presión
Electrostático	Permitividad dieléctrica	Potencial eléctrico	Carga

Tabla 2.5: Fenómenos físicos con su vector de rigidez y vector de carga.

Como se puede observar en la tabla 2.5 los datos de entrada son la matriz de rigidez y el vector de carga son datos de entrada, lo que se calcula con el método de los elementos finitos es el comportamiento para los problemas de ingeniería.

La ecuación 2.3.1 puede ser representada en forma escalar como:

$$k_{11}x_1 + k_{12}x_2 + \dots k_n x_n = f_1 \tag{2.3.2}$$

Donde los coeficientes k_{ij} y las constantes f_i están dadas, el problema es encontrar los valores de x_i , si estos existen, en la forma matricial:

$$K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & & & \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_n \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{2.3.3}$$

Note que en MEF el orden de la matriz de rigidez \mathbf{K} es grande.

Los métodos disponibles para resolver los sistemas de ecuaciones lineales se pueden dividir en dos tipos: directo o iterativo; Los métodos directos dan la solución exacta en un numero finito de operaciones aritméticas. El método fundamental usado para soluciones directas es la eliminación Gaussiana, sin embargo existen varios métodos cuales varían en la eficiencia computacional y la precisión.

Los métodos directos comienzan con una aproximación inicial que aplican un algoritmo seleccionado adecuadamente, dirigen con éxito a mejores aproximaciones, cuando el proceso converge se puede obtener una solución con buena aproximación, la exactitud y la tasa de convergencia de los métodos iterativos varían con el algoritmo seleccionado, las principales ventajas del método iterativo son la simplicidad y uniformidad de las operaciones a ser realizadas reduciendo el error (Barkanov, 2001).

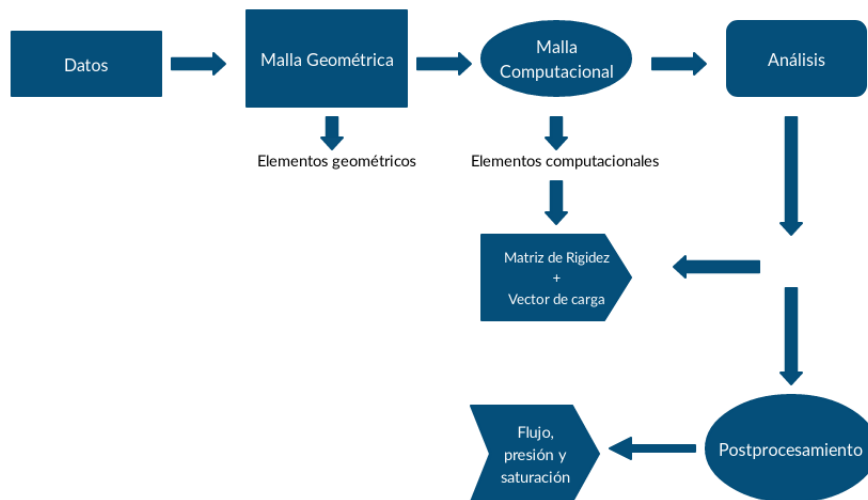


Figura 2.3.2: Proceso de simulación con MEF.

En la figura 2.3.2 se puede observar el proceso de simulación con el Método de los Elementos Finitos, consiste en tener datos de un yacimiento para generar una malla geométrica, esta se subdivide en n elementos geométricos finitos, el simulador convierte la malla geométrica en una malla computacional con el fin de realizar los cálculos respectivos de la matriz de rigidez y el vector de carga. En análisis se ensamblan la matriz de rigidez y el vector de carga sobre la malla computacional y se obtiene una matriz global, por postprocesamiento se conocen los resultados del comportamiento de flujo, presión y saturación para el caso de flujo de fluidos en medios porosos.

2.3.1. Aplicación del Método de los Elementos Finitos en Flujo de Fluidos Medios Porosos

Sabemos que la ecuación que gobierna al flujo es:

$$V = -K\nabla P \quad (2.3.4)$$

Asumiendo que la roca es incompresible, el fluido es incompresible y que la saturación es constante, entonces:

$$\nabla \cdot (\rho v) = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o S_o) = 0$$

Considerando que el yacimiento es isotrópico, y reemplazando da:

$$\nabla \cdot (-K\nabla P) = 0$$

La permeabilidad es constante por lo tanto:

$$-K\nabla \cdot (\nabla P) = 0$$

Resulta en:

$$\nabla \cdot (\nabla P) = 0$$

Calculando resulta en el Laplaciano de P:

$$\nabla^2 P = 0$$

La ecuación diferencial de la presión P quedaría:

$$P'' = 0 \quad (2.3.5)$$

condiciones de contorno:

$$0 < P < 1$$

Integrando:

$$\int \frac{d^2 P}{dx^2} \phi(x) = 0$$

Con el concepto de integración por partes, $du = d^2P/dx^2; v = \phi(x)$:

$$\int dv = \int \frac{d^2P}{dx^2}$$

$$v = \frac{dP}{dx}$$

Y con $v = \phi(x)$:

$$u = \phi(x)$$

$$du = \frac{d\phi}{dx}$$

Aplicando el concepto de integración por partes: $(du)(v) = u * v - \int v(du)$
Reemplazando:

$$\int \frac{d^2P}{dx^2} * \phi(x) = \phi(x) \frac{dP}{dx} - \int \frac{dP}{dx} \frac{d\phi(x)}{dx}$$

Entonces:

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \phi_i(x)$$

Reemplazando:

$$\int \alpha_i \left(\frac{d\phi_i}{dx} \right) \left(\frac{d\phi}{dx} \right) - \phi(x) \frac{dP}{dx} = 0$$

La primera parte de la ecuación es \mathbf{K} es decir la matriz de rigidez, la segunda parte es el vector de carga \mathbf{F} evaluado en las condiciones de contorno.

La solución resulta:

$$\begin{pmatrix} \int \phi_1' \phi_1' & \int \phi_1' \phi_2' \\ \int \phi_2' \phi_1' & \int \phi_2' \phi_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = P(x) = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

El comportamiento en este caso de la presión $P(x)$ sería el vector de desplazamiento.

2.3.2. Método de Galerkin

Este método se usa para calcular la matriz de rigidez; se tiene ecuaciones diferenciales que gobiernan algún fenómeno físico, determinado con condiciones de contorno.

Problema	Condición de Contorno	Evaluado en:
$\mathcal{L}u = f$	Ecuación diferencial parcial	Ω
$u = g_0$	Condición de Dirichlet	Γ_0
$n \cdot \nabla u = g_1$	Condición de Neumann	Γ_1
$n \cdot \nabla u + \alpha u = g_2$	Condición de Robin	Γ_2

Tabla 2.6: Problemas con diferentes condiciones de contorno.

Para resolver este tipo de problemas se resume en los siguientes pasos:

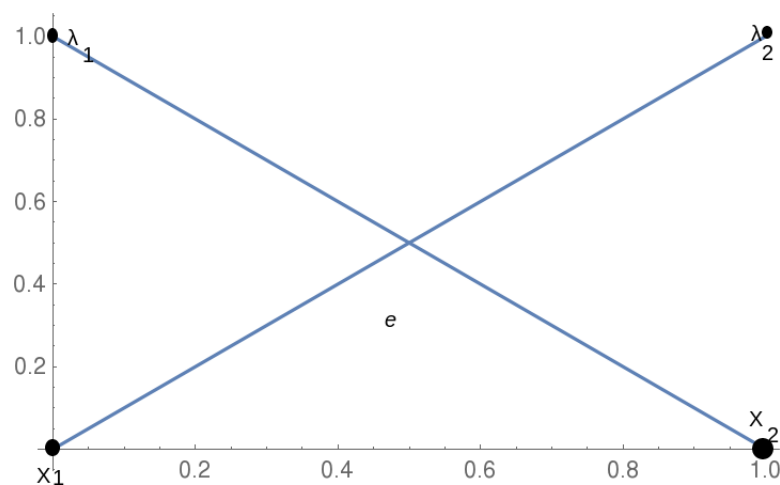
1. Multiplicar el residual de la EDP por una función de ponderación w evaluando en la condición de contorno de Dirichlet Γ_0 y el set sobre Ω equivalente a cero.
2. Integrar por partes usando las condiciones de contorno de Neumann y de Robin.
3. Representar la solución aproximada $u_h \approx u$ como una combinación lineal de funciones base polimoniales φ_i definido sobre una malla de simulación.
4. Sustituir las funciones u_h por u .
5. Resolver el resultante sistema algebraico por el vector de los valores nodales u_i .

2.3.2.1. Construcción de elementos unidimensionales (1D)

Elementos finitos lineales

Se considera *coordenadas baricéntricas* definidas sobre el elemento e , $e = [x_1, x_2]$:

$$\lambda_1(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \lambda_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Figura 2.3.3: Elemento e con funciones λ_1, λ_2 .

- $\lambda_i \in P_1(e), i = 1, 2$
- $\lambda_i(x_j) = \varphi_{ij}, i, j = 1, 2$
- $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) = \forall \in x$

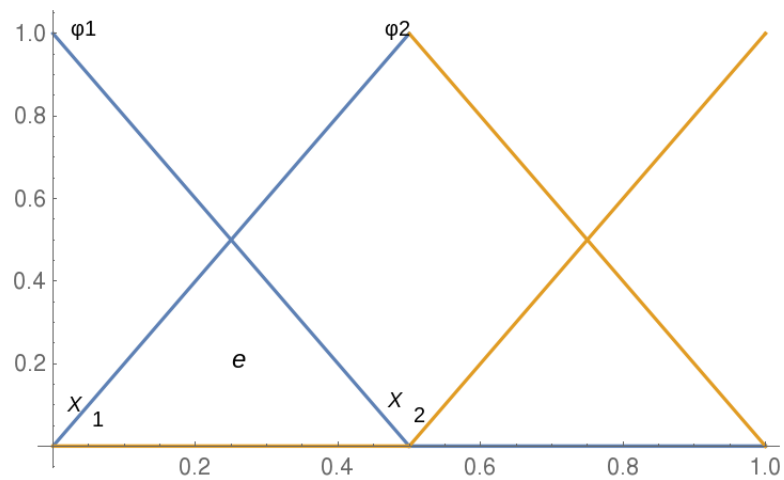


Figura 2.3.4: Elemento e con funciones φ_1, φ_2 .

Derivando la función λ_1 :

$$\frac{d\lambda_1}{dx} = -\frac{1}{x_2 - x_1} = -\frac{\lambda_2}{dx}$$

Funciones base:

$$\varphi_1|_e = \lambda_1, \varphi_2|_e = \lambda_2$$

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

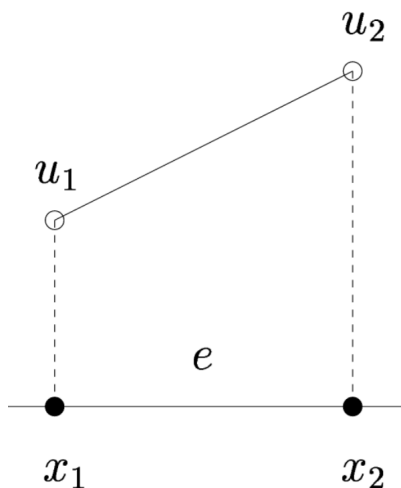
Por lo tanto φ_i es una función lineal a trozos continua en $[0, 1]$ su valor es uno el *nodo* x_1 y cero en otros nodos como se muestra en las figuras 2.3.2 y 2.3.3

$$u_h(x) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2$$

Para el caso del comportamiento de la presión en el flujo de fluidos sería:

$$P(x) = \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2$$

Por lo tanto quedaría ensamblada la matriz de rigidez y el vector de carga para el caso de funciones lineales en elementos finitos unidimensionales, como se muestra en la figura 2.3.4.

Figura 2.3.5: Elemento e con funciones base.

En la siguiente figura se observa la convergencia del método de los elementos finitos a la solución real, entre más elementos tenga el error disminuye notablemente, para el problema $y'' + x = 0$; $y(0) = 0$, $y(1) = 5/2$.

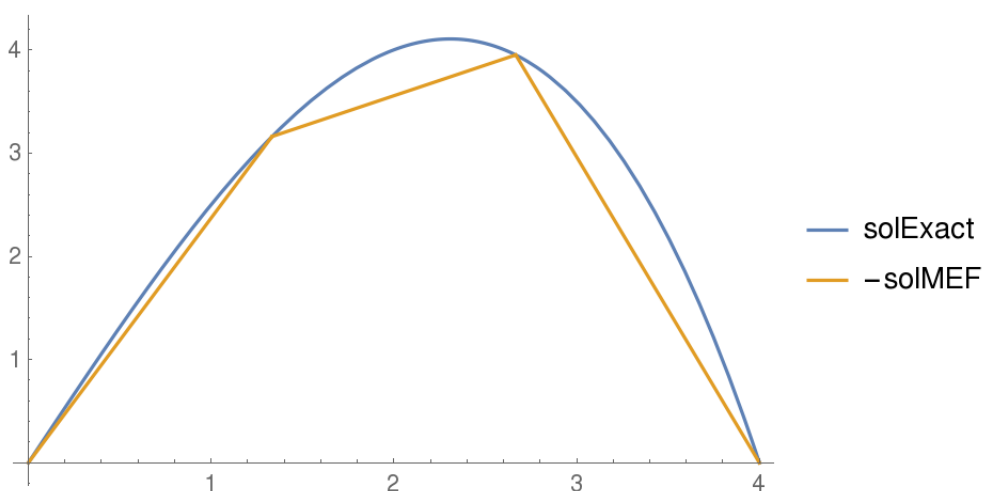


Figura 2.3.6: Solución analítica y solución MEF (3).

La curva azul representa a la solución analítica de la ecuación diferencial: $y'' + x = 0$ con condiciones de contorno $y(0) = 0$, $y(1) = 5/2$, y la curva anaranjada representa la solución numérica con el método de los elementos finitos con tres elementos.

La figura 2.3.7 muestra como converge con diez elementos a la solución exacta.

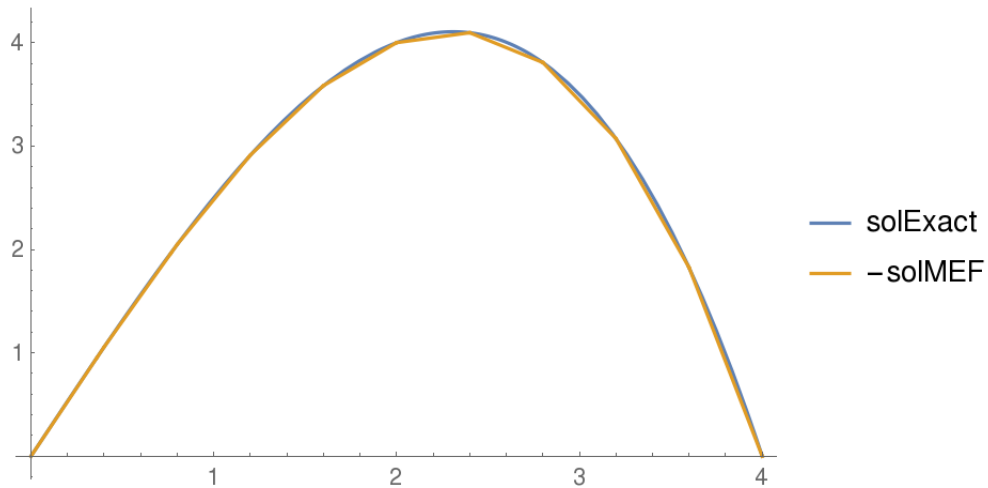


Figura 2.3.7: Solución analítica y solución MEF (10).

2.3.2.2. Construcción de elementos bidimensionales (2D)

Se considera un problema estacionario en dos dimensiones:

$$-\Delta p = f, \Omega$$

$$p = 0, \Gamma \quad (2.3.6)$$

Donde Ω es un dominio acotado en el plano con contorno Γ , f es un valor real continuo a trozos acotada en la función Ω , y el operador Laplaciano ∇^2 es definido por:

$$\nabla^2 p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2}$$

Se introduce el espacio lineal:

$$V = \begin{cases} v & \Omega \\ 0 & \Gamma \end{cases}$$

Se introduce el concepto de *Fórmula de Green* para un vector evaluado en la función $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, y el teorema de divergencia:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{b} dx = \int_{\Gamma} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dl \quad (2.3.7)$$

donde el operador de divergencia está dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2}$$

Y \mathbf{v} es la unidad exterior normal a Γ , y el producto punto $\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}$ es:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{v} = b_1 v_1 + b_2 v_2$$

Con $v, w \in V$, por lo tanto $\mathbf{b} = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} w, 0 \right)$ y $\mathbf{b} = \left(0, \frac{\partial v}{\partial x_2} w \right)$ en la ecuación 2.3.7 respectivamente, reemplazando:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} w dx + \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial x_i} w v_i dl, i = 1, 2 \quad (2.3.8)$$

Usando la definición de Gradiente:

$$\nabla v = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2} \right)$$

Reemplazando ∇v en la ecuación 2.3.8 y despejando se obtiene:

$$\int_{\Omega} \nabla v w dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} w dl - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w dx \quad (2.3.9)$$

Donde la derivada normal es:

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial v}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} v_2$$

La relación 2.3.8 es la Formula de Green, se mantiene para tres dimensiones, sin embargo en este proyecto se consideran yacimientos dos dimensiones.

Introduciendo la notación:

$$a(p, v) = \int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v dx$$

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v dx$$

La forma $a(\cdot, \cdot)$ es una forma bilineal sobre $V \times V$; eso es:

$$a(u, \alpha v + \beta w) = \alpha a(u, v) + \beta a(u, w),$$

$$a(\alpha u + \beta v, w) = \alpha a(u, w) + \beta a(v, w)$$

Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $u, v, w \in V$. Se define también la funcional $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - (f, v), v \in V.$$

Este problema es equivalente al problema variacional, se multiplica la ecuación diferencial 2.3.6 por $v \in V$ y se integra sobre Ω , se tiene que:

$$- \int_{\Omega} \nabla^2 p v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Se aplica la ecuación 2.3.9 a la anterior ecuación usando la condición de contorno homogéneo resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx$$

Sí: $\forall v \in V$.

Entonces se deriva la forma variacional:

Dado que $p \in V$

$$\alpha(p, v) = (f, v); \forall v \in V \tag{2.3.10}$$

Para simplificar se asume que Ω es un dominio poligonal.

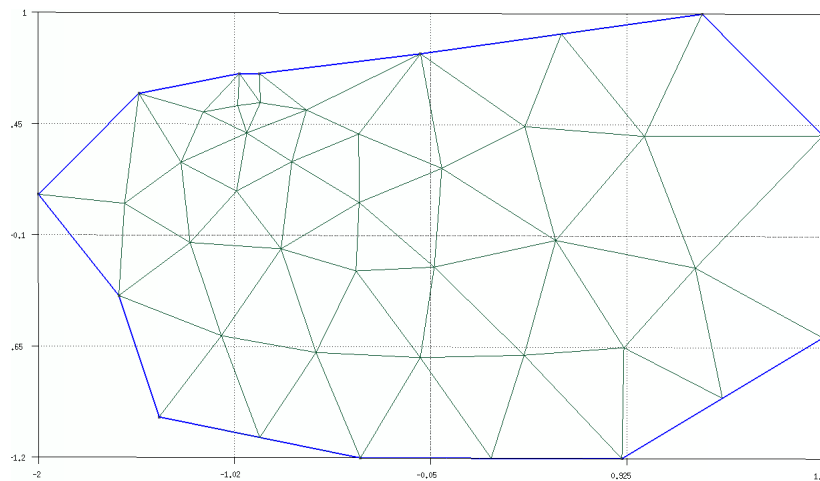


Figura 2.3.8: Partición de elementos finitos en dos dimensiones.

En la anterior figura se puede observar que la región fue dividida en figuras geométricas triangulares, este proceso se conoce como *triangulación*, de Ω sin *superposición*. Cada elemento sería K_i .

$$\bar{\Omega} = \bar{K}_1 \cup \bar{K}_2 \cup \dots \cup \bar{K}_m$$

Tal que ningún vértice se encuentre en el interior de un lado de otro triángulo, donde $\bar{\Omega}$ representa el cierre de Ω y así para cada elemento triangular K_i .

Las funciones base para cada triángulo son definidas por:

$$\varphi_i(\mathbf{x}_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

El set de ecuaciones de \mathbf{x} donde $\varphi_i(\mathbf{x}_i)$ es diferente de cero, consiste en el nodo que tienen en común los triángulos.

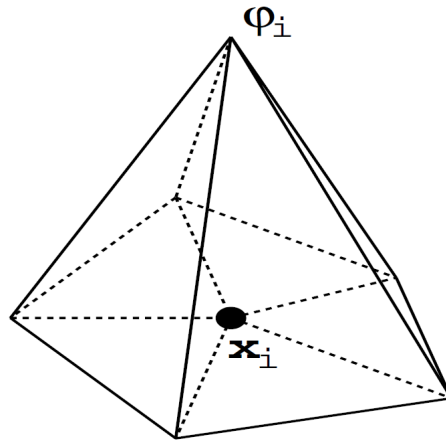


Figura 2.3.9: Funciones base en dos dimensiones. (Chen, 2006)

La matriz de rigidez para el caso de dos dimensiones es \mathbf{A} y los vectores de carga son \mathbf{p} y \mathbf{f} :

$$\mathbf{A}\mathbf{p} = \mathbf{f} \quad (2.3.11)$$

Con $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{p} = (p_{ij})$ y $\mathbf{f} = (f_{ij})$,
a su vez:

$$a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j),$$

$$f_j = a(f, \varphi_j),$$

$$i, j = 1, 2, 3, \dots, M.$$

Como en el caso unidimensional la matriz de rigidez \mathbf{A} es simétrica positiva.

Ensamblar la matriz de rigidez

Después de la triangulación se construye K_h , se computa las matrices de rigidez de los elementos con entradas a_{ij}^K dado por:

$$\alpha(p, v) = (f, v) + (g, v)_\Gamma \quad (2.3.12)$$

Por tanto, se retoma que $a_{ij}^K = 0$ a excepción de los nodos \mathbf{x}_i y \mathbf{x}_j ambos son vértices de $K \in K_h$.

Para un triángulo $K_{th}: K_k, Z(m, k)$ ($m = 1, 2, 3$) son los números de los vértices de K_k ,

donde: $Z(m, k)$ enumera los nodos de los elementos.

La matriz de rigidez $\mathbf{A}^{(k)} = (a_{mm}^k)_{m,n=1}^3$ se calcula así:

$$a_{mm}^k = \int_{K_k} \nabla \varphi_m \cdot \nabla \varphi_n dx; m, n = 1, 2, 3$$

donde las funciones base φ_m sobre K_k satisfacen:

$$\varphi_m(\mathbf{x}_{Z(n,k)}) = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

\mathbf{f} sobre K_k se computa por:

$$f_m^k = \int_{K_k} f \varphi_m dx$$

$$m = 1, 2, 3$$

m y n son los números locales de los tres vértices de K_k , mientras que i y j son los números globales de los vértices en K_h .

Para ensamblar la matriz global $\mathbf{A} = (a_{ij})$ y el vector de carga $\mathbf{f} = (f_j)$, se recorre todos los triángulos sobre K_k y se agrega sucesivamente las contribuciones de diferentes K_k .

Para $k = 1, 2, \dots, M$, se computa:

$$a_{Z(m,k),Z(n,k)} = a_{Z(m,k),Z(n,k)} + a_{mn}^k$$

$$f_{Z(m,k)} = f_{Z(m,k)} + f_m^k$$

donde: $m, n = 1, 2, 3$.

La aproximación usada es *elementos-orientados* es un bucle sobre los elementos, esta aproximación es más eficiente que la aproximación *nodos-orientados* porque gasta menos tiempo en las computaciones de la matriz de rigidez y el vector de carga.

2.3.2.3. Refinación de mallas

Refinar en simulación es subdividir una malla o una parte de esta en más elementos para que los cálculos sean más precisos en la zona refinada, la refinación puede ser uniforme como se muestra en la figura 2.3.9 o no uniforme como se muestra en la figura 2.3.10.

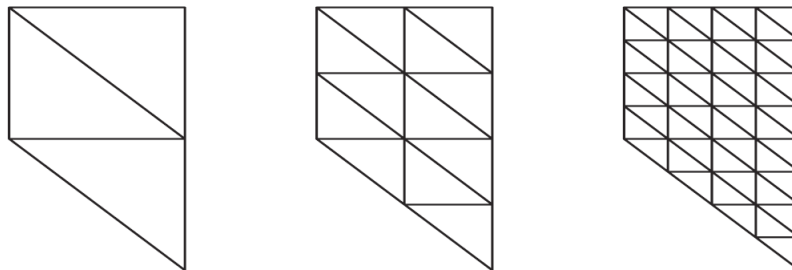


Figura 2.3.10: . Refinamiento de malla uniforme. (Chen, 2006)

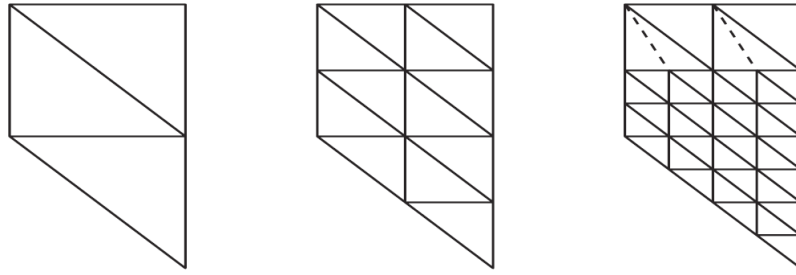


Figura 2.3.11: . Refinamiento de malla no uniforme. (Chen, 2006)

En la figura 2.3.10 el refinamiento no es uniforme, por lo tanto en las regiones donde los elementos son más grandes los cálculos serán menos precisos. La siguiente imagen muestra una malla de simulación de dos dimensiones con elementos y nodos enumerados.

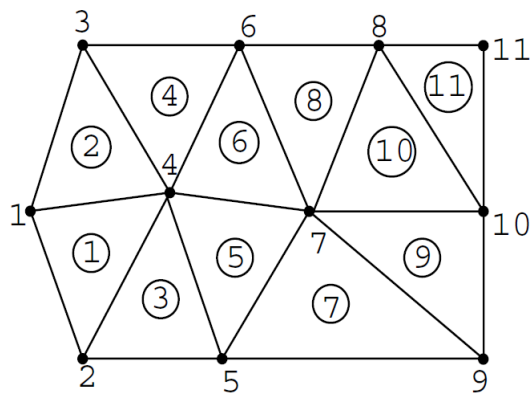


Figura 2.3.12: . Malla con elementos y nodos numerados. (Chen, 2006)

En la figura 2.3.11 se observa una malla bidimensional con elementos triangulares enumerados desde el elemento uno hasta el once, al igual que en los elementos los nodos son enumerados desde uno hasta el once, en este caso el número de elementos coincide con el número de nodos.

2.4. Formulaciones en Simulación Numérica de Yacimientos

Las formulaciones son modelos matemáticos de yacimientos, existen formulaciones que han sido desarrolladas para solucionar diferentes problemas, por ejemplo la formulación black-oil y composicional que ya han sido descritas en la sección de la Ley de Darcy, sin embargo existen otros modelos como:

- IMPES
- Fully implicit
- Fully explicit

Se describirán las formulaciones brevemente, existen más formulaciones pero las mencionadas son las más utilizadas en la industria del petróleo.

2.4.1. IMPES

Se llama IMPES por *Implicit Pressure - Explicit Saturation*, es decir por como calcula la ecuación diferencial de la presión lo hace implícitamente, mientras que la ecuación diferencial de la saturación la calcula explícitamente, esto quiere decir que primero resuelve la ecuación de la presión, el valor encontrado de presión se introduce en la ecuación de la saturación y este valor de saturación se introduce en la ecuación de la presión, iterativamente hasta resolver el problema en todos los elementos de la malla (Chen et al., 2002).

Ventajas

- Método altamente eficiente, reduce el tiempo computacional.
- Tiene en cuenta parámetro de presión capilar.
- Puede ser un método directo o iterativo.
- Utiliza el método de Newton-Raphson para converger a la solución en menos iteraciones.

Desventajas

- Desacoplamiento de las ecuaciones presión y saturación.
- En medios porosos altamente heterogéneos las fuerzas de la presión capilar cambia las distribuciones de la saturación lo que conlleva a inestabilidad en la simulación.
- No considera flujo trifásico.

2.4.2. Fully Implicit

Este método resuelve las ecuaciones diferenciales de la presión y saturación implícitamente, este método es estable numéricamente. Puede presentar errores debido a *tiempos de paso* relativamente grandes (Cheshire et al., 1980), al igual que en IMPES este método para calcular las soluciones numéricas utiliza el método de Newton, Fully implicit considera tres fluidos: gas, petróleo y agua.

2.4.3. Fully Explicit

Este método resuelve las ecuaciones diferenciales de la presión y de la saturación explícitamente, simula el flujo bifásico dado por el petróleo y el agua, es altamente eficiente utilizando computadores en paralelo para reducir el tiempo de la simulación y aumentar la precisión en los resultados (Piault & Ding, 1993).

2.5. Marco Conceptual

- **Anisotropía:** Las propiedades del sistema varían en todas las direcciones.
- **Bidimensional:** De dos dimensiones.
- **Caudal:** Cantidad volumétrica o másica de fluido que fluye por unidad de tiempo.
- **Conductividad térmica:** Es una medida que tiene un material para conducir calor.
- **Densidad:** Es la masa de un cuerpo sobre su volumen.
- **Difusión:** Movimiento de partículas de un lugar donde hay alta concentración a un lugar con menor concentración.
- **Factor de recobro:** Cantidad total de petróleo producido sobre la cantidad de petróleo original en sitio.
- **Fluidos inmiscibles:** Cuando hay flujo de dos o más fluidos sin que estos se mezclen.
- **Flujo:** Movimiento del gas, del petróleo o del agua.
- **Flujo bifásico:** Flujo de dos fluidos como petróleo y agua, gas y petróleo, gas y agua.
- **Flujo monofásico:** Flujo de un fluido.
- **Gravedad:** Es la fuerza de atracción hacia los cuerpos debido al centro de la tierra según Newton, para Einstein la gravedad es la deformación del espacio-tiempo dada por la masa de la tierra.
- **Heterogeneidad:** Sistema que varía las propiedades en los puntos, yacimiento no uniforme, tiene irregularidades.
- **Homogeneidad:** Sistema que tiene las mismas propiedades en cada punto, yacimiento de composición uniforme.
- **Isotropía:** Las propiedades del sistema son idénticas en cualquier dirección.

- **Masa:** Cantidad de materia de un cuerpo o de un fluido.
- **Malla de simulación:** Conjunto de elementos que conforman un sistema o un objeto con datos iniciales para aplicar simulación y observar su comportamiento, por ejemplo un yacimiento con fluidos.
- **Permeabilidad:** Calidad de un material que causa que un fluido fluya a través de él.
- **Peso molecular:** Es una medida de la suma de los pesos atómicos de los átomos que conforman una molécula.
- **Porosidad:** Fracción de volumen del yacimiento que almacena fluidos.
- **Presión:** Fuerza perpendicular aplicada sobre un área en un fluido.
- **Recuperación primaria:** Producción de petróleo por energía natural del yacimiento.
- **Recuperación secundaria:** Inyección de agua para aumentar la producción de petróleo mediante desplazamiento inmisible.
- **Saturación:** Es el porcentaje de volumen poroso que ocupa el volumen de uno o más fluidos.
- **Simulación:** Descripción de un fenómeno físico por modelos matemáticos para conocer su comportamiento en el tiempo.
- **Solución analítica:** Es la solución exacta de un problema o de una ecuación diferencial.
- **Solución numérica:** Es una solución que se aproxima a la solución exacta.
- **Temperatura:** Es una medida de la energía cinética promedio de las partículas en un sistema.
- **Tiempo de paso:** Tiempo en el que transcurre cada iteración para resolver las ecuaciones de presión y saturación.
- **Tridimensional:** Ocupa tres dimensiones en el espacio o tiene tres dimensiones.
- **Unidimensional:** De una dimensión.
- **Viscosidad:** Es la restricción al flujo de un fluido dado por la alta fricción entre sus moléculas.
- **Volumen:** Cantidad de espacio que ocupa un objeto o sustancia en el espacio.
- **Yacimiento:** Roca porosa que contiene fluidos como gas, petróleo y agua.

La siguiente tabla muestra la nomenclatura utilizada con su unidad en el sistema internacional.

Símbolo	Definición	Unidades
A	Área de sección transversal	m^2
B	Factor volumétrico de formación	adimensional
c	Compresibilidad	Pa^{-1}
C	Fracción de masa de un componente	adimensional
D	Profundidad (depth)	m
\mathcal{D}	Difusividad	m^2/s
f_w	Relación de la movilidad del agua a la movilidad total	adimensional
F_w	Fracción del flujo del agua	adimensional
g	Aceleración dada por la gravedad	m/s^2
G_w	Función de la saturación y de la gravedad	m/s
h_w	Función de la saturación con movilidad y capilaridad	m^2/s
H	Espesor de yacimientos bidimensionales	m
K	Permeabilidad absoluta	m^2
k_r	Permeabilidad relativa	adimensional
K_i	Distribución constante para el componente ith	adimensional
L	Longitud del yacimiento	m
M	Peso molecular del gas	kg/mol
p	Presión	Pa
p_c	Presión capilar	Pa
q	Caudal de flujo másico por volumen de reservorio	kg/m^3s
Q	Caudal de flujo másico en el pozo	kg/s
Q_t	Caudal total volumétrico equivalente a q_n/ρ_n	s^{-1}
\dot{Q}	Caudal volumétrico	m^3/s
R	Constante de los gases	$cm^3MPa/s/^{\circ}K mol$
R_{so}	Solubilidad del gas en petróleo	-
R_{sw}	Solubilidad del gas en agua	-
S	Saturación	-
t	Tiempo	s
u	Función general	-
v	Velocidad del flujo	m/s
\vec{v}	Vector de la velocidad del flujo	m/s
x,y,z	Distancia	m
μ	Viscosidad	$Pa \cdot s$
ρ	Densidad	kg/m^3
ϕ	Porosidad	-
Φ	Potencial	Pa

Tabla 2.7: Símbolos y unidades en el sistema internacional.

Capítulo 3

Casos de Estudio

3.1. Metodología

Para la elaboración de este proyecto se han propuesto una serie de fases y consecuentemente pasos que describen la metodología con el siguiente diagrama de flujo:

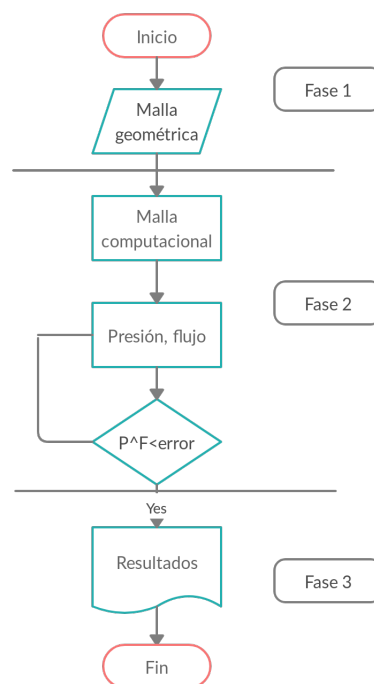


Figura 3.1.1: Diagrama de flujo metodológico. Fuente: Autor

Como se puede ver en la figura en la Fase 1: i) consta de la generación de mallas geométricas bidimensionales con datos iniciales como presión inicial del yacimiento principalmente, sí hay entrada de flujo o no. En la Fase 2: i) el programa convierte las mallas geométricas en mallas computaciones para

realizar las operaciones, calcular la matriz de rigidez, el vector de carga y la matriz global, ii) calcula la presión y el flujo, iii) comprueba si los resultados obtenidos son menores al error. En la Fase 3: i) Muestra los resultados de presión, flujo y saturación.

3.1.1. Generación de mallas

El proceso de generación de mallas bidimensionales se realizan en un software llamado *Gmsh*, este es un generador de mallas unidimensionales, bidimensionales o tridimensionales, donde primero se realiza el contorno del yacimiento, luego se le das condiciones de contorno o diferentes materiales, al final el programa utiliza diferentes algoritmos que generan los elementos para cualquier malla.

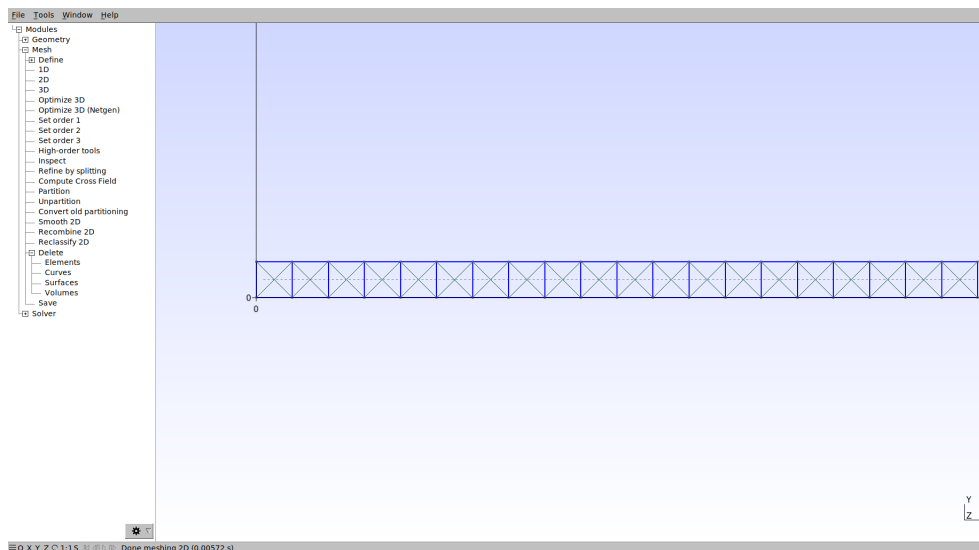


Figura 3.1.2: Interfaz del generador de mallas Gmsh.

En la figura 3.1.2 se muestra la interfaz de Gmsh, en este caso es una malla lineal con elementos triangulares, esta malla tiene: 46 puntos, 65 líneas, y las dimensiones de la malla son de longitud $20m$, de espesor $1m$, con un área de $20m^2$.

3.1.2. NeoPZ

Es una biblioteca de elementos finitos que ha sido desarrollada desde 1997 en el Lenguaje de Programación C++ por Philippe Devloo para la investigación en diferentes áreas de ingeniería: civil, aeronáutica, petróleo, mecánica. Esta biblioteca ofrece un amplio número de algoritmos de elementos finitos, para problemas de una, dos y tres dimensiones (Devloo, 1997).

3.2. Formulaciones Primal y Mixta

3.2.1. Problema lineal

Una ecuación lineal para el problema de flujo se da por:

$$\alpha(x)p - \nabla \cdot (K(x)\nabla p) = f(x) \quad (3.2.1)$$

Dadas las funciones α, f y el tensor K , se debe encontrar la presión y el flujo \mathbf{u} tal que:

$$\alpha p + \nabla \cdot (\mathbf{u}) = f \text{ en } \Omega \quad (3.2.2)$$

y

$$\mathbf{u} = -K\nabla p \text{ en } \Omega \quad (3.2.3)$$

las condiciones de contorno son:

$$p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

Se asume que K es un tensor positivo.

La ecuación 3.2.1 se conoce como *Formulación Primal* es una formulación clásica para el modelo lineal, la *Formulación Mixta* se basa en las ecuaciones 3.2.2 y 3.2.3 con sus respectivas condiciones de contorno, para los dos casos la presión y el flujo se calculan simultáneamente.

3.3. Formulación Primal

La formulación primal H^{-1} busca soluciones en el espacio:

$$H_0^1(\Omega) = \{p \in H^1(\Omega) : p = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$$

Multiplicando la ecuación 3.2.1 por una función de prueba $qp \in H^1(\Omega)$, integrando en el dominio Ω , se aplica integración por partes, y utilizando la condición de contorno de Dirichlet, se obtiene el problema variacional:

Encontrar:

$$p \in H^1(\Omega)$$

de forma que:

$$(\alpha p, q) + (K\nabla p, p) = (f, q) \quad (3.3.1)$$

Para todo q que pertenece al espacio de Hilbert con sus condiciones de contorno.

3.4. Formulación Mixta

Para esta formulación se definen los espacios para el flujo como:

$$\mathcal{V} = H(\nabla, \Omega), \quad (3.4.1)$$

y para la presión:

$$Q = L^2(\Omega) \quad (3.4.2)$$

Multiplicando la ecuación 3.2.3 por una función de prueba $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, integrando sobre el dominio Ω y aplicando integración por partes para el segundo término, se obtiene:

$$(K^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot (\mathbf{v})) + \int_{\partial\Omega} p\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0$$

es decir:

$$(K^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot (\mathbf{v})) = 0$$

Se tiene que la condición de contorno $p = 0$ sobre $\partial\Omega$ se impone de manera fuerte en el espacio de aproximación de la presión, sin embargo se inserta de manera débil en la formulación variacional.

Multiplicando la ecuación 3.2.2 por una función de prueba $q \in Q$, se obtiene la formulación mixta.

$$(K^{-1}\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \nabla \cdot (\mathbf{v})) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.4.3)$$

$$(\nabla \cdot (\mathbf{u}), q) + (\alpha p, q) = (f, q) \quad \forall q \in Q \quad (3.4.4)$$

Las ecuaciones 3.4.3 y 3.4.4 pueden ser representadas en una forma variacional abstracta dados por los espacios de Hilbert, \mathbf{V}, Q y $f \in Q$, se debe encontrar $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$, de forma que:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (3.4.5)$$

$$b(\mathbf{u}, q) - c(p, q) = -(f, q) \quad \forall q \in Q \quad (3.4.6)$$

Estas formulaciones fueron desarrolladas por Romero en 2016 para simulación de yacimientos tridimensionales, sin embargo en este estudio las hemos adaptado para yacimientos bidimensionales.

3.5. Problemas

Teniendo en cuenta que las ecuaciones diferenciales de presión, flujo y saturación deben ser resueltas en cada elemento de la malla computacional, se consideran despreciables los efectos de la presión capilar y que la temperatura es constante, sin embargo se tiene en cuenta los efectos de la compresibilidad,

la gravedad y la alta heterogeneidad de los yacimientos, para los cuatro casos presentados a continuación se aplicará las formulaciones primal y mixta, y se compararán los resultados.

Para cada caso se presentará los resultados obtenidos en las simulaciones con las formulaciones primal y mixta, posteriormente se presentarán las comparaciones.

3.5.1. Caso I

El siguiente caso el yacimiento es altamente heterogéneo, a su vez la geometría del yacimiento es lineal, la condición de contorno es ingresa agua a un caudal q_i para producir petróleo q_o , como condición inicial de contorno se tiene que ingresa agua a una presión de 500 Pascales y sale petróleo a una presión de 0 Pascales.

Malla computacional

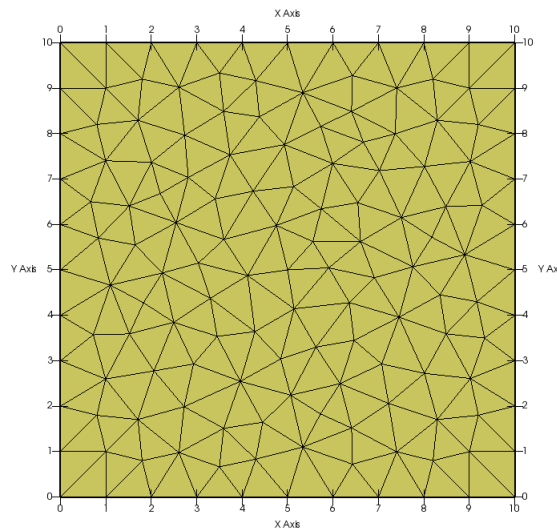


Figura 3.5.1: Malla geométrica del caso I.

En la figura 3.5.1 se presenta la malla geométrica con sus respectivos elementos, cada figura geométrica es un elemento en este caso es triangular, esta malla tiene una longitud de $10m$ y una altura de $10m$. Esta malla tiene 675 elementos. Para este problema con la formulación primal se resolvieron 82 ecuaciones y con la formulación mixta 245 ecuaciones.

Presión con la formulación primal

El comportamiento de la presión en esta malla se observa en la siguiente imagen:

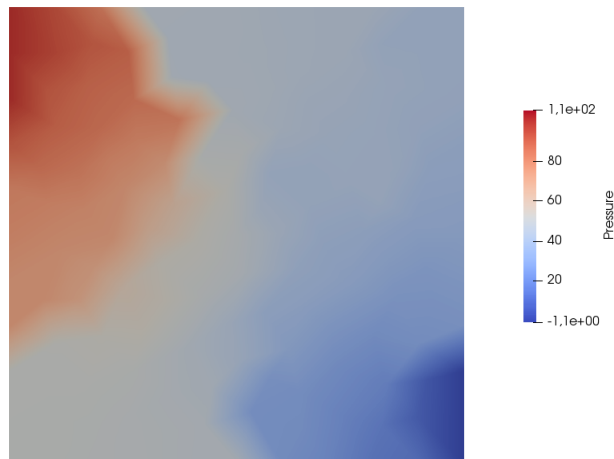


Figura 3.5.2: Comportamiento de la presión para el caso I.

En la figura 3.5.2 se observa el comportamiento de la presión, como se mencionó anteriormente la zona superior izquierda es por donde ingresa el flujo, en esta posición existe mayor presión, esta es la zona de color rojiza, la presión tiende a disminuir a lo largo de la malla, en la zona azulada es donde la presión es menor y tiende a cero.

Flujo con la formulación primal

Hay que destacar que con la formulación primal para este caso y para los casos posteriores el flujo se calcula con postprocesamiento. El flujo se representa de esta manera teniendo en cuenta la heterogeneidad del yacimiento, es decir, existen zonas donde la roca varía su permeabilidad entre 10 mD y 100 mD.

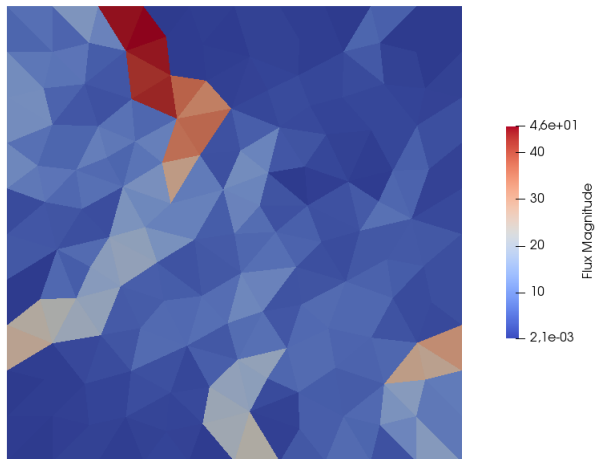


Figura 3.5.3: Comportamiento del flujo para el caso I.

En la figura 3.5.3 se observa el comportamiento del flujo, las zonas rojizas representan donde existe mayor magnitud del flujo, esto indica que las zonas rojas son más permeables que las zonas azuladas, el elemento de color vinotinto muestra que la permeabilidad y la presión en esa zona son altas, mientras que el más azul muestra que en ese lugar la permeabilidad y la magnitud del flujo son bajas.

Presión con la formulación mixta

En la siguiente imagen se observa el comportamiento de la presión solucionado con la formulación mixta:



Figura 3.5.4: Presión con la formulación mixta para el caso I.

La figura 3.5.5 representa las zonas más permeables y las impermeables del yacimiento, las zonas más rojizas son las zonas más permeables, esto indica que la roca en dichas zonas son de arenisca, mientras que las zonas azuladas son menos permeables, por lo tanto serían arcillas.

Flujo con la formulación mixta

El comportamiento del flujo con la formulación mixta resultó como se muestra en la figura 3.5.4, como se muestra se puede ver claramente la dirección del flujo en este yacimiento altamente heterogéneo:

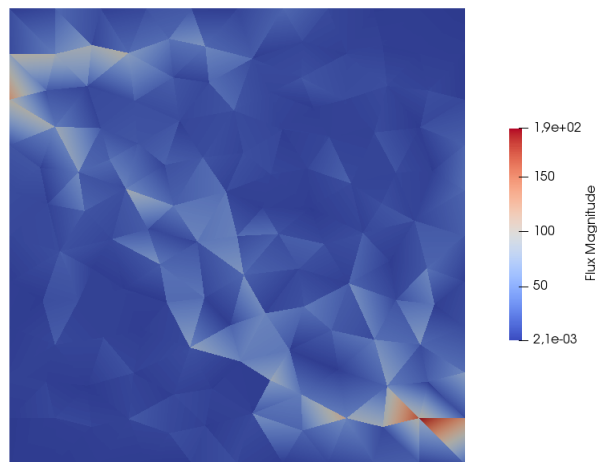


Figura 3.5.5: Flujo con la formulación mixta para el caso I.

Comparación y análisis de los resultados

Las siguientes figuras muestran las tendencias de las curvas de presión y flujo con las formulaciones primal y mixta.

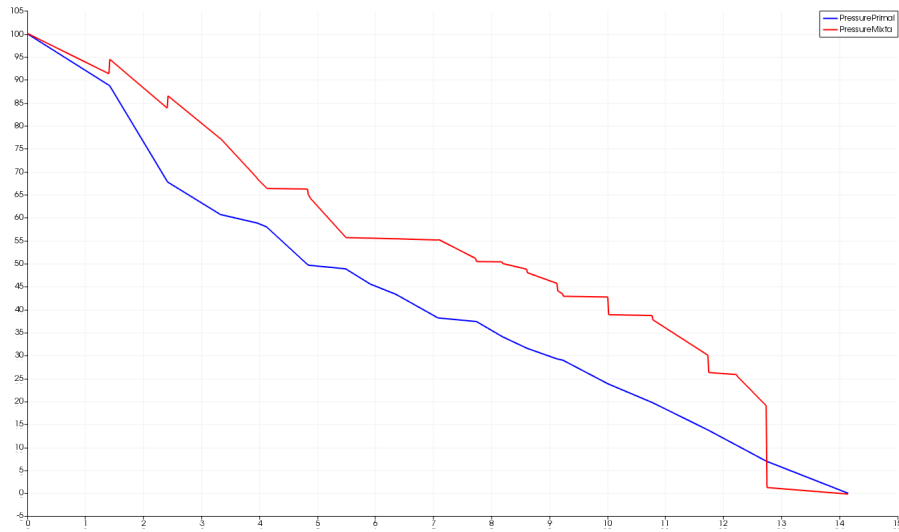


Figura 3.5.6: Comparación entre las curvas de presión.

La curva azul describe el comportamiento de la presión obtenida con la formulación primal, la curva roja describe el comportamiento de la presión obtenida con la formulación mixta, debido a que con la formulación mixta se resuelve un sistema de ecuaciones para solucionar la ecuación diferencial de la presión en cada elemento de la malla de simulación, mientras que con la formulación primal resuelve primero la ecuación diferencial del flujo, el valor obtenido se actualiza en la ecuación diferencial de la presión y así iterativamente, resultando que los cálculos de la formulación mixta sean más precisos que con la formulación primal. La presión máxima en ambos casos es de 100 Pascales, la presión mínima es de 0 Pascales, pero la curva roja obtenida con la formulación mixta se asemeja más a la realidad que con la curva obtenida con la formulación primal.

La figura 3.5.7 muestra la tendencia de las curvas obtenida con ambas formulaciones, la curva azul se obtuvo con la formulación primal, la curva roja se obtuvo con la formulación mixta, para el flujo las curvas no son similares como se aprecia en la figura esto se debe a que el flujo se obtiene por: $v = K\nabla P$, K es la permeabilidad absoluta de la matriz, para ambos casos es altamente heterogénea con valores aleatorios entre 10 y 100 mD.

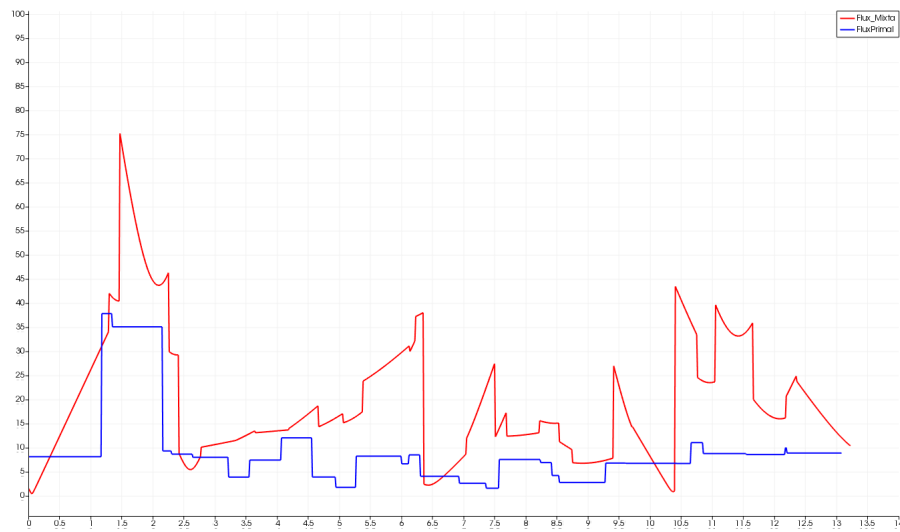


Figura 3.5.7: Comparación entre las curvas de flujo.

3.5.2. Caso II

Este caso es una geometría más real comparada con el Caso I, como condiciones de contorno iniciales se tiene que el caudal de agua ingresa al yacimiento a una presión de 500 Pascales y se produce petróleo a una presión de 100 Pascales, el yacimiento es altamente heterogéneo, la malla geométrica de este caso es la siguiente:

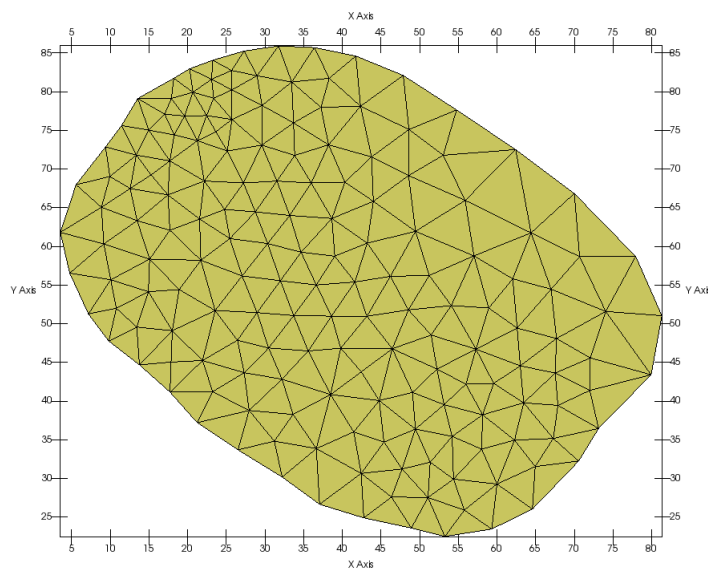


Figura 3.5.8: Malla geométrica del caso II.

La anterior malla tiene un área menor a $1000m^2$, si fuera cuadrilátera el área tendría el valor mencionado, sin embargo la geometría es algo ovalada, por tanto tendría un valor de área aproximado a $3340m^2$. Esta malla tiene 336 elementos triangulares, para este problema con la formulación primal se resolvieron 925 ecuaciones y con la formulación mixta 2774 ecuaciones.

Presión con la formulación primal

La solución de la presión para este caso con la formulación primal se muestra en la siguiente figura:

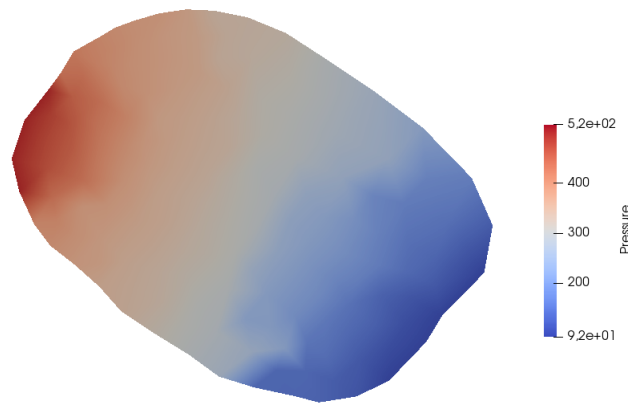


Figura 3.5.9: . Solución de la presión con la formulación primal para el caso II.

La zona por donde ingresa agua a 500 Pascales es la zona rojiza, la zona azulada sería la salida del petróleo del yacimiento a 100 Pascales.

Flujo con la formulación primal

El flujo con la formulación primal para este caso resultó así:

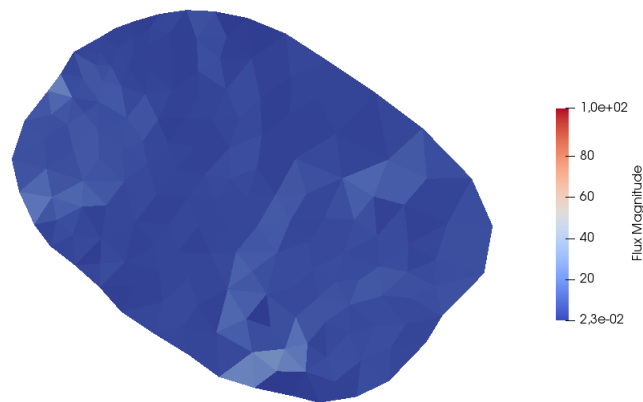


Figura 3.5.10: . Solución del flujo con la formulación primal para el caso II.

Presión con la formulación mixta

En la siguiente figura se muestra la solución de la presión para este caso con la formulación mixta. La zona más roja representa la entrada de caudal de agua a 500 Pascales y la zona azulada representa la producción de petróleo a 100 Pascales.

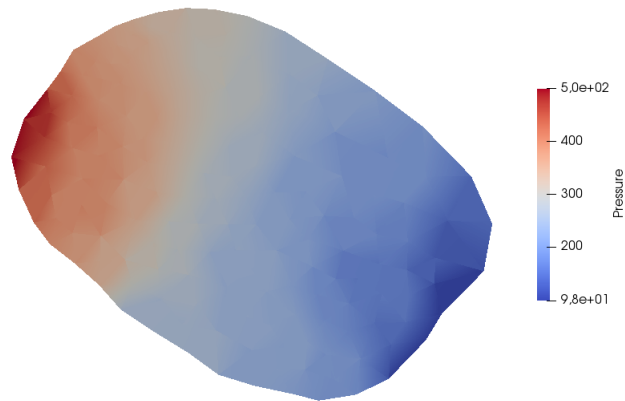


Figura 3.5.11: . Solución de la presión con la formulación mixta para el caso II.

Flujo con la formulación mixta

La magnitud del flujo para este caso con la formulación mixta resultó como se muestra en la figura 3.5.10.

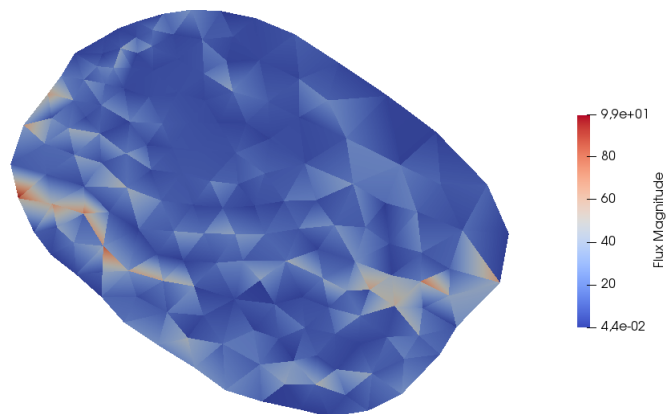


Figura 3.5.12: . Solución del flujo con la formulación mixta para el caso II.

Como se aprecia en la anterior figura se puede observar las líneas de flujo con mayor definición que con la formulación primal, las líneas que tienen al color rojo es donde la magnitud del flujo es mayor, y donde las líneas son azules oscuras el flujo tiende a cero.

Comparación y análisis de los resultados

Las siguiente figura indica las tendencias del comportamiento de la presión para este caso con las formulaciones primal y mixta.

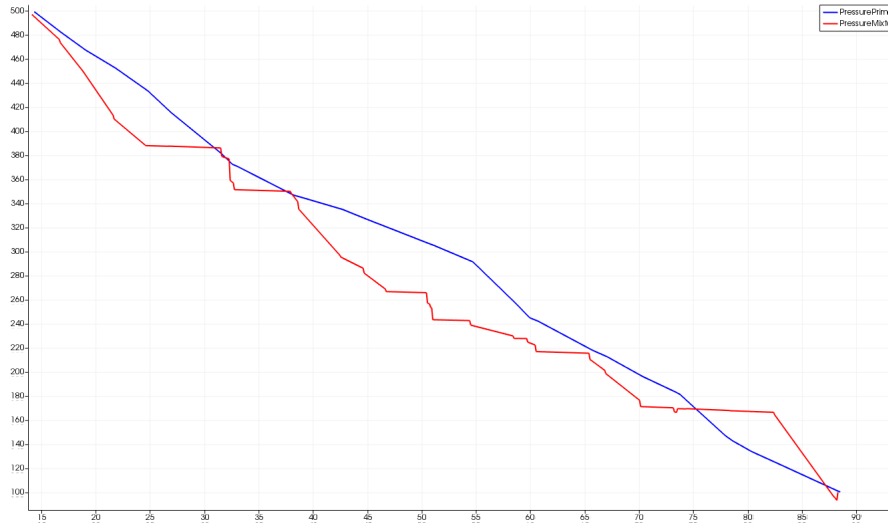


Figura 3.5.13: . Comparación de las curvas de la presión.

La curva de presión color azul se obtuvo con la formulación primal, y la curva color roja se obtuvo con la formulación mixta, como se puede apreciar en la figura 3.5.13 el comportamiento de la curva roja es mucho más real que el de la curva azul.

La figura 3.5.14 muestra la comparación de las curvas obtenidas para el flujo:

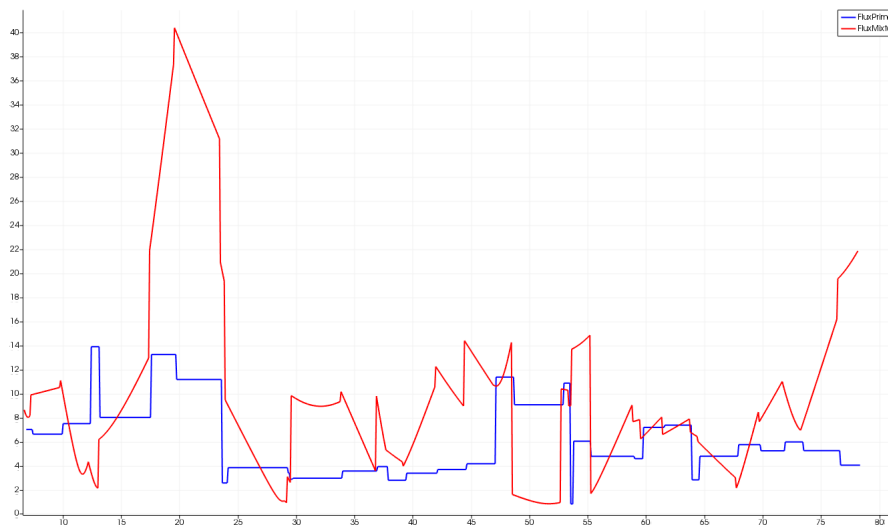


Figura 3.5.14: . Comparación de las curvas de flujo.

Para el flujo como se observa en la anterior figura, la curva azul representa a los resultados de flujo obtenidos con la formulación primal, la curva roja representa los resultados de flujo obtenidos con la formulación mixta, el comportamiento es similar, sin embargo el comportamiento del flujo con la formulación mixta es mucho mayor y real que con la formulación primal.

3.5.3. Caso III

Malla geométrica

Para este caso la malla geométrica se muestra en la figura 3.5.13; las condiciones de contorno son: entrada de flujo a 1000 Pascales, salida de flujo a 50 Pascales.

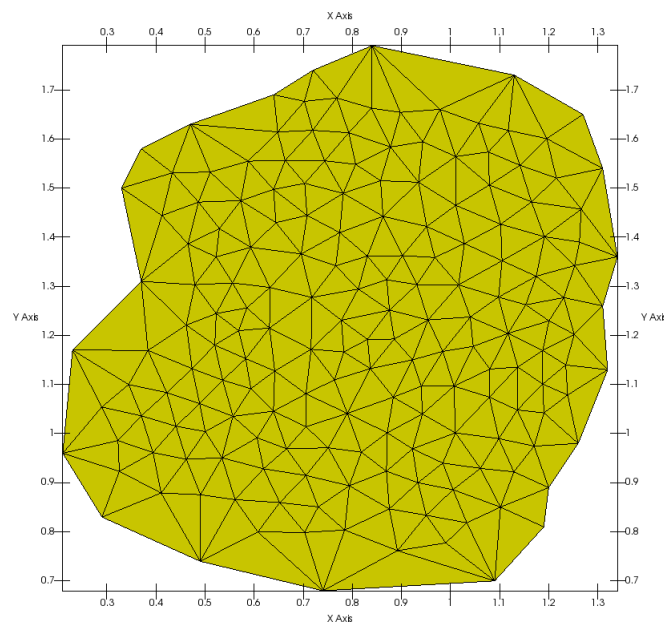


Figura 3.5.15: . Malla geométrica del caso III.

En este caso la malla de simulación es relativamente pequeña al compararlas con la de los anteriores casos, esta malla tiene una área aproximada de $0.97m^2$ y tiene 356 elementos, para la generación de elementos se da el proceso de triángulación, en este caso sería triángulación no uniforme debido a la complejidad de la malla. Para este problema con la formulación primal se resolvieron 1010 ecuaciones y con la formulación mixta 3028 ecuaciones.

Presión con la formulación primal

El comportamiento de la presión para este caso con la formulación primal se muestra en la siguiente figura:

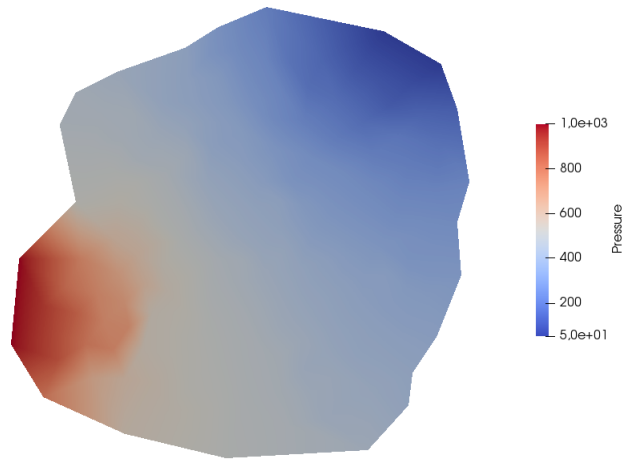


Figura 3.5.16: . Resultado de la presión con la formulación primal para el caso III.

El valor de presión más alta es de 1000 pascales y es por donde ingresa agua al yacimiento, mientras que la presión más baja es de 50 Pascales y es por donde se produce petróleo.

Flujo con la formulación primal

La solución del flujo con la implementación primal para este caso resultó así:

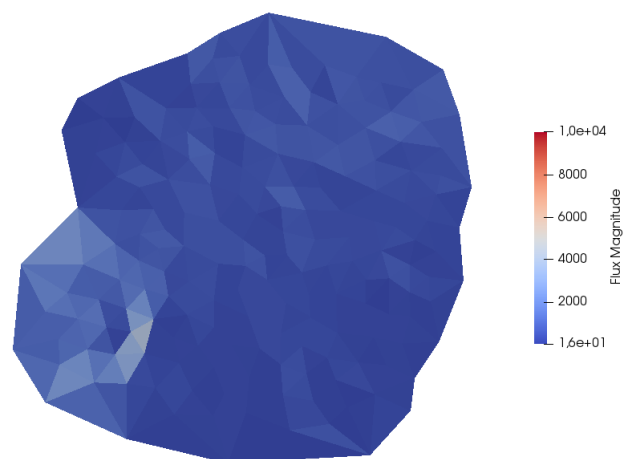


Figura 3.5.17: . Resultado del flujo formulación primal para el caso III.

Para este caso el flujo iría desde la parte inferior izquierda de la malla hacia la superior derecha, se puede observar en la figura que el flujo va desde $16m/s$ a $5000m/s$, esto se da por el valor de las permeabilidades donde el flujo es alto la permeabilidad de la roca será muy alta, y sí el valor del flujo es pequeño entonces la permeabilidad de la roca será pequeña, el flujo es directamente proporcional a la permeabilidad.

Presión con la formulación mixta

La solución para la presión con la formulación mixta para este caso se indica en la figura 3.5.18. Se puede apreciar que la presión se comporta de una manera más real que con la formulación primal, hay mucha más presión en el elemento por donde ingresa agua al yacimiento esta se distribuye a lo largo del yacimiento respetando la condición de contorno de salida de petróleo inicial a 50 Pascales.

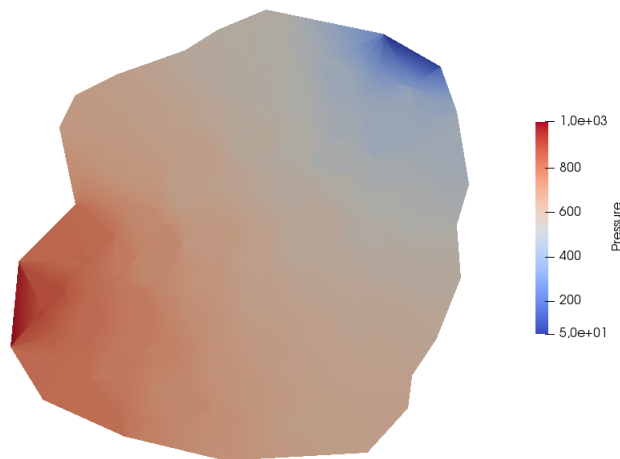


Figura 3.5.18: . Solución con la formulación mixta para el caso III.

Flujo con la formulación mixta

La solución del flujo con la formulación mixta se muestra en la figura 3.5.19; Como se puede apreciar en la figura 3.5.16 las líneas de flujo se mira desde la zona donde ingresa el agua hacia donde se produce petróleo, el valor de flujo mínimo es $16m/s$ y el valor máximo es $5100m/s$:

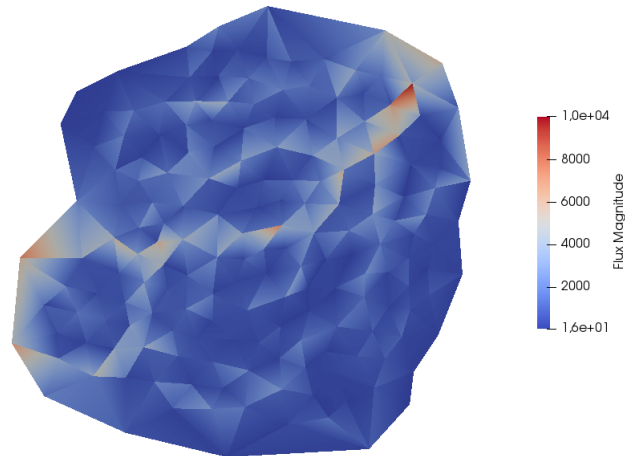


Figura 3.5.19: . Resultado de flujo con la formulación mixta para el caso III.

Comparación y análisis de los resultados

La siguiente figura muestra las tendencias de las curvas de presión con las formulaciones primal y mixta para este caso.

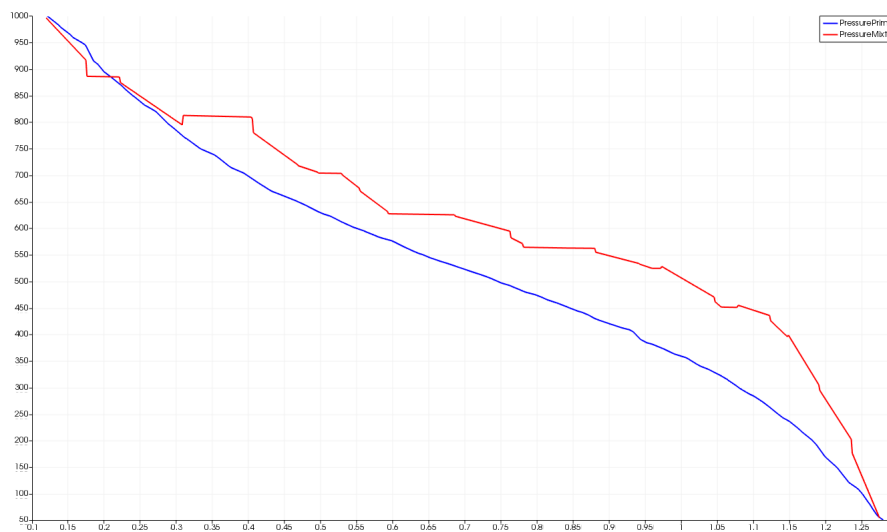


Figura 3.5.20: . Comparación de las curvas de presión.

Como se muestra en la figura las 3.5.20 las curvas roja y azul representan las soluciones de la presión respectivamente obtenidas con la formulación mixta primal, la curva roja obtenida con la formulación primal tiende a un comportamiento ideal, mientras que la curva obtenida con la formulación mixta el comportamiento es más real.

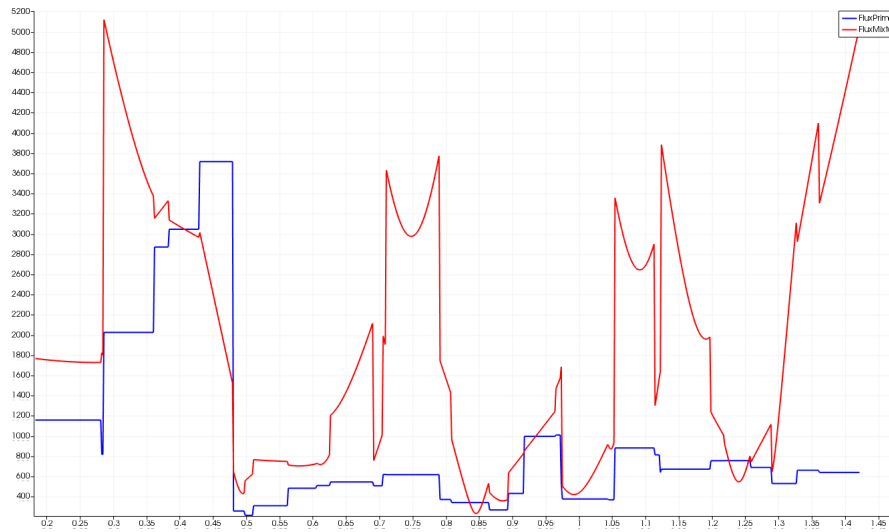


Figura 3.5.21: . Comparación de las curvas de flujo.

Con respecto al flujo obtenido con la formulación mixta es mucho mayor que con la primal, con la formulación mixta el valor del flujo más alto es $5100m/s$, con la formulación primal es $3800m/s$ esto da un margen de error de 23.52% . El valor de flujo más bajo con la formulación mixta es de $280m/s$, mientras con la formulación mixta es $300m/s$ esto da un margen de error de 6.67% .

3.5.4. Caso IV

Malla geométrica

Para este caso la malla geométrica se muestra en la figura 3.5.19, como condiciones de contorno: la presión de entrada de flujo es 150000 Pascales, la presión de salida de flujo es de 101325 Pascales equivalente a 1 atmósfera.

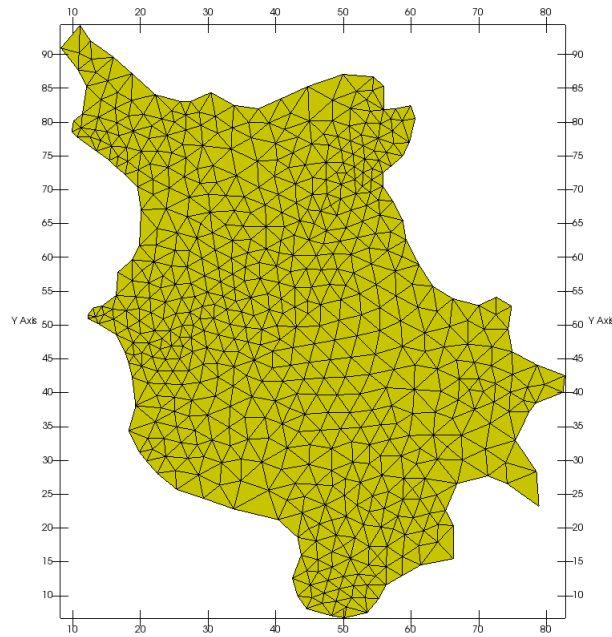


Figura 3.5.22: Malla geométrica del caso IV.

La geometría de esta malla tiende más a la realidad que en los casos vistos anteriormente, esta tiene un área aproximada de $3415.71m^2$, tiene 1202 elementos, para solucionar este problema con la formulación primal se resolvieron 3350 ecuaciones, con la formulación mixta se resolvieron 10050 ecuaciones.

Presión con la formulación primal

La solución de la presión para este caso se representa en la figura 3.5.23. La presión se distribuye a lo largo del yacimiento con las condiciones de contorno ya mencionadas, que va desde 101325 Pascales a 150000 Pascales,

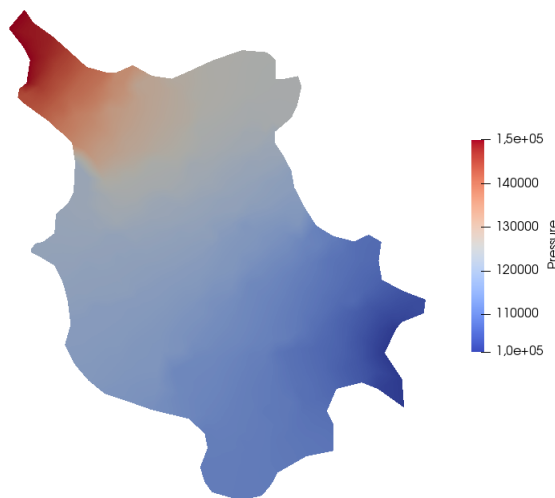


Figura 3.5.23: . Solución de la presión con la formulación primal para el caso IV.

Flujo con la formulación primal

La solución del flujo para este caso aplicando la formulación primal se muestra en la siguiente figura:

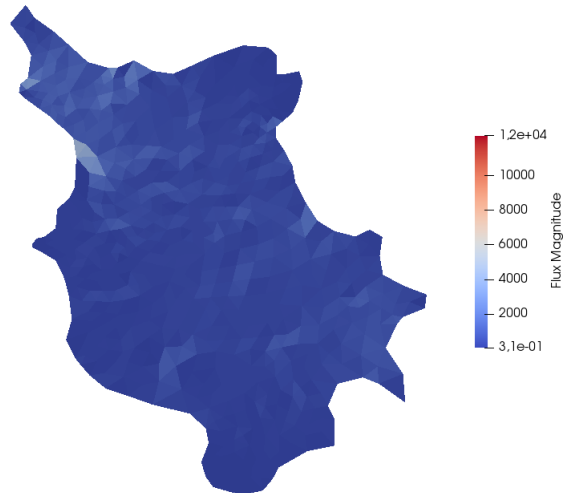


Figura 3.5.24: . Solución del flujo con la formulación primal para el caso IV.

Se puede apreciar en la figura 3.5.24 que entra flujo a una velocidad de 7000 m/s y sale a una velocidad de 31 m/s .

Presión con la formulación mixta

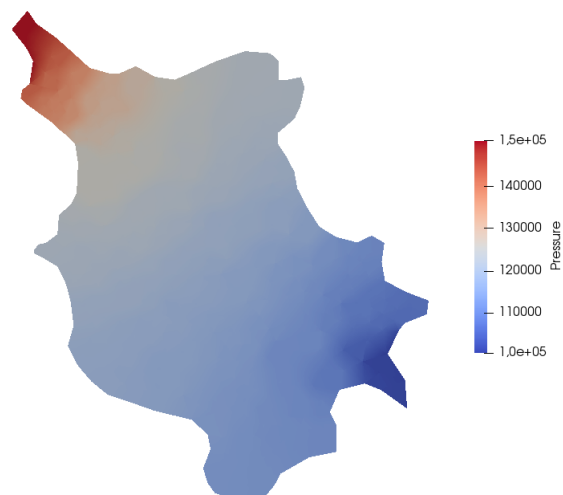


Figura 3.5.25: . Solución de la presión con la formulación mixta para el caso IV.

La solución de presión para este caso implementando la formulación mixta se muestra en la anterior figura, se indica que la zona rojiza está a una presión de 150000 Pascales, la zona más azulada está a una presión de 101325 Pascales.

Flujo con la formulación mixta

La solución del flujo implementando la formulación mixta se indica en la figura 3.5.26.

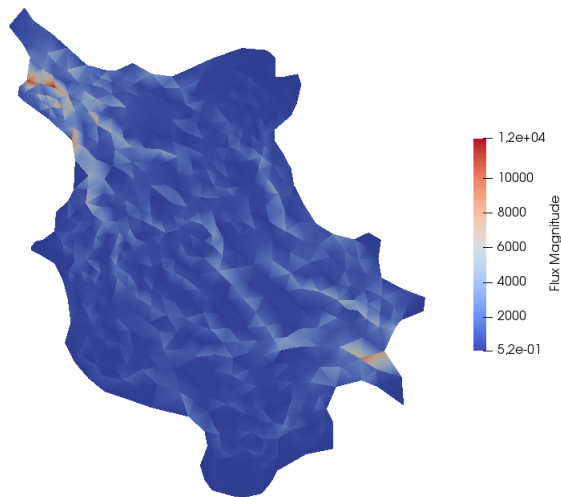


Figura 3.5.26: . Solución del flujo con la formulación mixta para el caso IV.

Comparación y análisis de los resultados

La figura 3.5.27 muestra las tendencias de las curvas de presión obtenidas con las formulaciones primal y mixta para este caso.

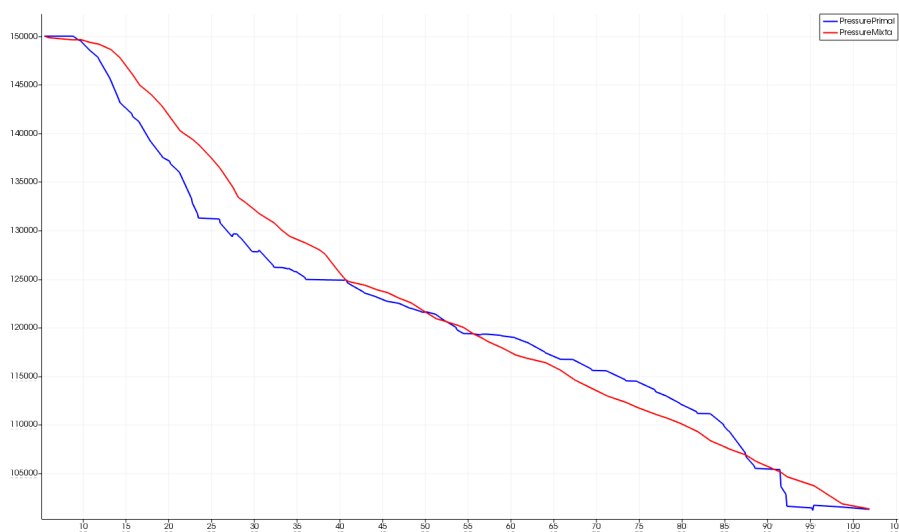


Figura 3.5.27: . Comparación entre las curvas de presión para el caso IV.

La figura 3.5.28 muestra la comparación entre las curvas de flujo obtenidas con ambas formulaciones.

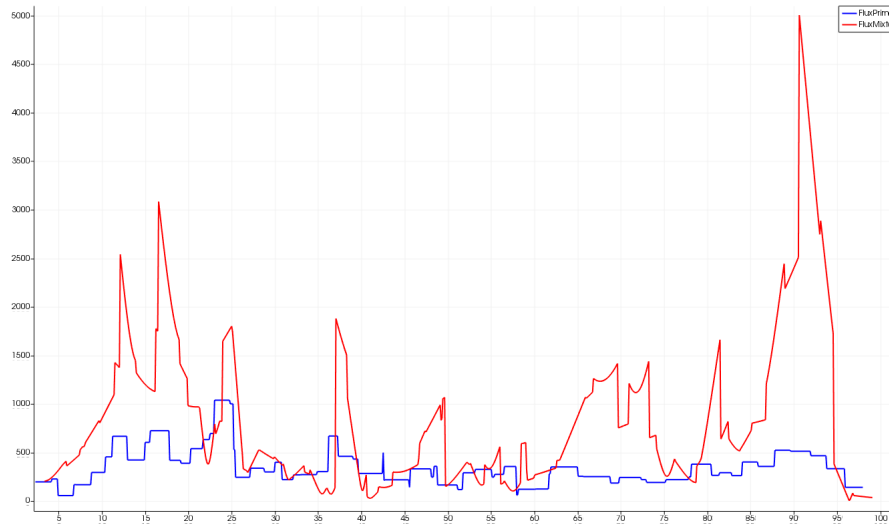


Figura 3.5.28: . Comparación de las curvas de flujo.

En la anterior figura se puede apreciar que el flujo con la formulación primal es mucho menor que el flujo obtenido con la formulación mixta. El valor mayor de flujo obtenido con la formulación primal es de 1100 m/s con la formulación mixta el valor mayor de flujo es de 5000 m/s , los valores mínimos de flujo son de 300 m/s y 100 m/s con la formulación primal y mixta respectivamente.

Capítulo 4

Conclusiones

- La implementación de las formulaciones primal y mixta son efectivas con el método de los elementos finitos, sin embargo, mientras la formulación primal resuelve una ecuación de presión por cada elemento, la formulación mixta resuelve un sistema de ecuaciones simultáneamente de presión y flujo, lo que reduce el margen de error.
- Con la formulación primal la tendencia de las curvas de flujo y presión son funciones suaves por la heterogeneidad de los yacimientos, mientras que con la formulación mixta las curvas de tendencia de presión y flujo presentan un comportamiento más real.
- La formulación mixta resuelve aproximadamente tres veces más ecuaciones diferenciales que con la formulación primal reduciendo el error en cada uno de los elementos, se puede observar claramente en el capítulo 3 para todos los casos de estudio.
- El tiempo de computación es mucho menor con la formulación primal que con la mixta por la cantidad de ecuaciones que se resuelven en cada uno de los casos.
- La biblioteca de elementos finitos Neopz posee variedad de algoritmos para los problemas de flujo de fluidos inmiscibles en medios porosos, lo cual ha permitido que las formulaciones primal y mixta sean estables y consistentes, teniendo en cuenta yacimientos bidimensionales geométricamente complejos y altamente heterogéneos.
- El método de los elementos finitos converge a diferentes tiempos a la solución exacta dependiendo del número de elementos que tenga cada caso, por tanto se han resuelto las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo de fluidos, como las ecuaciones de presión y flujo en cada elemento de la malla de simulación, a su vez reduce el error porque encuentra las funciones de presión y flujo para cada fluido.

Capítulo 5

Recomendaciones

- Para trabajar con simulaciones más precisas se debe alcanzar más fenómenos físicos que ocurren en los yacimientos de hidrocarburos, además de alta heterogeneidad del yacimiento, fluido compresibles e incompresibles, y flujo bifásico que considera este estudio, habría que agregar otros fenómenos como yacimiento tridimensional con gran extensión volumétrica, flujo trifásico, saturaciones iniciales de gas, petróleo y agua, también procesos de transferencia de masa entre gas-petróleo, considerar la presencia de fallas donde se podría variar la permeabilidad, desde baja hasta elevada.
- Realizar las simulaciones con ambas formulaciones en una computadora de última generación debido a que reduce el tiempo computacional en casos extremadamente complejos, los cuales tienen más elementos, geometrías variables y un volumen poroso mayor, es decir, entre más compleja la malla de simulación más tardaría una computadora en calcular presión, flujo y saturación.
- Realizar mallas más complejas agregando la tercera dimensión, pozos verticales, desviados y en racimo, lo cual mejoraría el factor de recobro.

Bibliografía

- [1] Peery, J. & Herron, E. (1969). Three-phase Reservoir Simulation. *Society of Petroleum Engineers*.
- [2] Hadziavdic, I. (2015). *Comparasion of a Finite-Difference and Finite-Element Centered Finite Volume Reservoir Simulator*. Leoben: Montan University of Leoben.
- [3] Redondo, C. (2017). *A fast IMPES multiphase flow solver in porous media for reservoir simulation*. Madrid: Universidad Politécnica de Madrid.
- [4] Batycky, R. P., & Thiele, M. R. (2018). Material Balance Applied to Dynamic Reservoir-Surveillance Patterns. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/185713-PA.
- [5] Romero, M. (2016). *Métodos de Elementos Finitos Mistos-Híbridos para um Problema Elíptico Não Linear em Malhas Quadrilaterais*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- [6] Rafiqul, M., Abou, J., & Farouq-Ali, S. (2019). *Petroleum Reservoir Simulation 2nd Edition*. Halifax: Gulf Professional Publishing.
- [7] Islam, M. R., Hossain, M., Hossein, S., Mustafiz, S., & Abou-Kassem, J. (2016). *Advanced Petroleum Reservoir Simulation*. New Jersey: Scrivener Publishing LLC.
- [8] Chen, Z., Huan, G., & Ma, Y. (2006). *Computational Methods for Multiphase Flows in Porous Media (págs. 75-205)*. Dallas: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [9] Lie, K. (2019). *An Introduction to Reservoir Simulation Using MATLAB/GNU Octave*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [10] Durán, O. (2017). *Development of a Surrogate Multiscale Reservoir Simulator Coupled with Geomechanics (págs. 46-68)*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- [11] Breitenbach, E., Thurnau, D., & Van Poolen, H. (1968). The Fluid Flow Simulation Equations. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/2020MS.

- [12] Villegas, J. (2016). *Modelagem Em Elementos Finitos de Escoamento Axissimétrico Bifásico Compressível*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.
- [13] Bastian, P. (1999). *Numerical Computation of multiphase flows in porous media*. Springer.
- [14] Slattery, J. (1963). Generalized Darcy's Law. *Society of Petroleum Engineers*.
- [15] Ewing, R. (1983). *The Mathematics of Reservoir Simulation*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [16] Kufahl, R. & Greenkorn, R. (1968). The Effect Of Heterogeneity On Single-Phase Flow In Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*.
- [17] Hales, H. B. (2006). Reservoir Simulation Boundary Conditions. *Petroleum Society of Canada*. doi:10.2118/2006-138.
- [18] Al-Marhoun, M. A. (2014). Isothermal Oil Compressibility Curve Crossing. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/172207-MS.
- [19] Ahmed, T. (2015). *Reservoir Engineering Handbook (págs. 29-36)*. Gulf Professional Publishing. ISBN: 978012813649.
- [20] Panton, R. (2013). *Incompressible Flow, Fourth Edition (págs. 1-14)*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 9781118713075.
- [21] Hewett, T., & Behrens, R. (1993). Considerations Affecting the Scaling of Displacements in Heterogeneous Permeability Distributions. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/20739-PA.
- [22] Pavone, D. R. (1990). A Darcy's Law Extension and a New Capillary Pressure Equation for Two-Phase Flow in Porous Media. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/20474-MS.
- [23] Xu, F., Mu, L., Wu, X., Sun, T., Ding, Y., Tian, X., & Jin, R. (2014). New expression of oil/water relative permeability ratio vs. water saturation and its application in water flooding curve. *Energy Exploration & Exploitation*.
- [24] Ojo, K., & Osisanya, O. (2006). Material Balance Revisited. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/105982-MS.
- [25] Chang, J., & Yortsos, Y. (1992). Effect of Capillary Heterogeneity on Buckley-Leverett Displacement. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/18798-PA.
- [26] Machado, M. (2011). Comparison between 1D Radial Solutions for Immiscible Displacement in Petroleum Reservoirs. *Society of Petroleum Engineers*.

- [27] Acs, G., Doleschall, S., & Farkas, E. (1985). General Purpose Compositional Model. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/10515-PA.
- [28] Schindler, M. (2007). Phase Envelopes From Black-Oil Models. *Society of Petroleum Engineers*. doi:10.2118/106855-MS.
- [29] Stein, E. (2014). *History of the Finite Element Method – Mathematics Meets Mechanics – Part I: Engineering Developments*. Berlín: Springer.
- [30] Nikishkov, G. (2004). Introduction to the Finite Element Method. *Lecture Notes*. Wakamatsu: University of Aizu.
- [31] Cook, R., Malkus, D., Plesha, M., & Witt, J. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis, 4th Edition*. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 978-0-471-35605-9.
- [32] Barkanov, E. (2001). Introduction to the Finite Element Method. *Riga Technical University*.
- [33] Chen, Z., Huan, G., & Li, B. (2004). An Improved IMPES Method for Two-Phase Flow in Porous Media. *Transport in Porous Media* 54.
- [34] Cheshire, I., Appleyard, J., & Banks, D. (1980). An Efficient Fully Implicit Simulator. *Society of Petroleum Engineers*.
- [35] Piauxt, E. & Ding, Y. (1993). A Fully Explicit Scheme in Reservoir Simulation on a Massively Parallel Computer. *Society of Petroleum Engineers*.
- [36] Devloo, P. (1997). PZ: An Object Oriented Environment for Scientific Programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. ISSN 0045-7825.